ГЛАВА IV

ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 45. Свойства пространства-времени и координаты

Форма уравнений, определяющих ход того или иного физического процесса в пространстве и времени, зависит, кроме специфических особенностей данного процесса, еще от двух обстоятельств: от свойств пространства-времени и от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Свойства пространства-времени являются объективными, определяемыми самой природой и не зависящими от нашего произвола. Напротив того, выбор координат в самой высокой степени зависит от нашего произвола. Правда, и здесь произвол не является неограниченным, в том смысле, что существование некоторых, особо выделенных, координатных систем (галилеевых координат) возможно только в силу объективных свойств реального пространства-времени: такие координатные системы не существовали бы, если бы эти свойства были иными. Однако всегда возможно перейти, путем математического преобразования, от привилегированной координатной системы к любой другой; правила такого перехода мы изучали в предыдущей главе.

Чтобы отвлечься от специфических особенностей данного процесса необходимо рассмотреть такие уравнения, которые являются наиболее общими и наиболее непосредственно характеризуют свойства пространства-времени. Таким является уравнение, выражающее закон распространения фронта волны, идущей с предельной скоростью. Этому закону подчиняется, в первую очередь, распространение фронта световой (электромагнитной) волны в свободном пространстве. Однако, как мы уже указывали, закон этот должен рассматриваться не как специфический закон, относящийся только к свету, но как общий закон, которому подчиняется распространение всякого рода возмущений, идущих с предельной скоростью. Уравнение распространения фронта волны в свободном пространстве характеризует не только свойства распространяющегося в нем вида материи (например, электромагнитного поля), но и свойства самого пространства и времени. (Мы неоднократно указывали, что и практически измерение больших расстояний основано на триангуляции и на радиолокации, т. е. на использовании закона распространения электромагнитных волн.) Тем самым геометрические понятия, как и понятие времени, теснейшим образом связываются с законом распространения фронта волны в свободном пространстве.

В галилеевых координатах

$$x'_0 = ct; \quad x'_1 = x; \quad x'_2 = y; \quad x'_3 = z \tag{45.01}$$

закон этот выражается уравнением

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 = 0, \tag{45.02}$$

где $\omega = \text{const}$ есть уравнение движущейся поверхности фронта волны. Уравнение (45.02) представляет математическое выражение того факта, что волновая поверхность движется в направлении своей нормали со скоростью света. Отождествляя нормаль к волновой поверхности с лучом и рассматривая точку пересечения луча с фронтом волны, мы можем, на основании уравнения (45.02), утверждать, что эта точка движется по лучу прямолинейно и равномерно со скоростью света (в галилеевых координатах).

Наряду с распространением фронта волны, мы можем рассмотреть простейший процесс, в котором осуществляется движение со скоростью, меньшей скорости света. Это есть свободное движение материальной точки. В форме Гамильтона — Якоби уравнения движения принимают вид, аналогичный (45.02), а именно:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 = 1, \tag{45.03}$$

где ω пропорционально функции действия. Действительно, полный интеграл уравнения (45.03) имеет вид:

$$\omega = a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 - \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot x'_0. \tag{45.04}$$

Приравнивая постоянным производные от ω по a_1, a_2, a_3, получаем прямолинейное и равномерное движение со скоростью, меньшей скорости света.

Таким образом, за основные уравнения, наиболее непосредственно отражающие свойства пространства-времени, мы можем взять уравнения (45.02) и (45.03).

Форма входящего в эти уравнения оператора

$$(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 \tag{45.05}$$

сама характеризует как свойства пространства-времени, так и физический смысл координат.

Если бы мы не знали, что такое независимые переменные (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), а знали бы только, что они как-то связаны с пространством и временем (или, выражаясь математически, что они служат для арифметизации пространства и времени), мы получили бы их физическое толкование, рассматривая процессы, описываемые уравнениями (45.02) и (45.03). Фактически при построении теории относительности мы так и поступали. Физический смысл переменных (45.01) устанавливался нами как бы в два приема. Первоначально мы пользовались теми (не совсем точными) понятиями координат и времени, которые были приняты в классической дорелятивистской физике. Предварительное определение времени связывало переменную t с ходом часов (или какого-нибудь периодического процесса), а определение пространственных координат связывало переменные x, y, z с расстояниями, измеряемыми при помощи твердых тел на основе законов евклидовой геометрии (координатная сетка). Но мы сразу же обратили внимание на то, что эти определения нуждаются в уточнении.

В самом деле, пользование часами, находящимися в разных точках пространства, требует решения вопроса о их синхронизации, пользование же твердыми масштабами для измерения больших расстояний не только невозможно практически, но и вызывает принципиальные возражения.

Определения физических величин никогда не являются произвольными, а всегда с большей или меньшей точностью отражают природу. Поэтому уточнение определений возможно только на основе более глубокого познания природы. В интересующем нас случае (определение времени и координат) мы можем опираться, кроме использованного еще Ньютоном закона прямолинейности и равномерности движения свободного тела, на твердо установленный закон распространения фронта световой волны в свободном пространстве, т. е. на уравнения (45.02) и (45.03). Так мы и поступали при построении теории относительности, которая, по существу, является теорией пространства и времени. (Название „теория относительности“ обусловлено историческими причинами и лишь весьма односторонне отражает ее содержание.) Действительно, фундаментальное для теории относительности преобразование Лоренца, отражающее свойства пространства и времени и уточняющее смысл переменных x, y, z, t, выводится *из* закона распространения фронта волны (в соединении с требованием сохранения прямолинейности и равномерности движения), а не априори, не *до* установления этого закона.

Таким образом, как свойства пространства-времени, так и смысл галилеевых координат (45.01) устанавливаются на основе уравнений (45.02) и (45.03).

Но уравнение фронта волны и уравнение Гамильтона — Якоби для свободной материальной точки могут быть написаны и в более общей форме

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0, \tag{45.06}$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 1 \tag{45.07}$$

и тогда только что высказанное утверждение относится и к ним: как свойства пространства-времени, так и смысл координат (x_0, x_1, x_2, x_3) устанавливаются на основе этих уравнений.

Предположим, что величины $g^{\mu\nu}$ представляют заданные функции своих переменных. Какие свойства этих функций отражают свойства самого пространства-времени и какие обусловлены лишь выбором координат?

Если принять, что объективные свойства пространства-времени правильно описываются обычной теорией относительности, то они могут быть сформулированы в виде утверждения, что существуют галилеевы координаты, в которых уравнения (45.06) и (45.07) принимают вид (45.02) и (45.03).

Это утверждение означает, что существует подстановка

$$x'_\alpha = f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{45.08}$$

которая приводит выражение

$$(\nabla\omega)^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \tag{45.09}$$

к виду

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_k}\right)^2. \tag{45.10}$$

Из общего тензорного анализа мы знаем, что необходимым и достаточным условием приводимости квадратичной формы (45.09) к квадратичной форме с постоянными коэффициентами является равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга, составленного из коэффициентов $g^{\mu\nu}$ (и соответствующих $g_{\mu\nu}$). Чтобы приведенная квадратичная форма имела (при квадратах производных) один знак плюс и три знака минус, необходимо еще выполнение величинами $g^{\mu\nu}$ тех неравенств, которые были установлены в § 35.

Таким образом, уравнения, которым должны удовлетворять величины $g^{\mu\nu}$, имеют вид

$$R_{\mu\nu, \alpha\beta} = 0, \tag{45.11}$$

$$g^{00} > 0; \quad \sum_{i, k=1}^{3} g^{ik}\xi_i\xi_k < 0, \tag{45.12}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — произвольные числа.

Эти уравнения и выражают (с той точностью, с которой справедлива обычная теория относительности) свойства пространства-времени, не зависящие от выбора координат.

Если эти уравнения выполнены, то вид искомого преобразования (45.08) определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца. Величины $x'_\alpha = f_\alpha$ должны быть тогда истолкованы, как галилеевы координаты. Тем самым получается и толкование тех переменных (x_0, x_1, x_2, x_3), в которых первоначально были написаны уравнения.

В приведенном рассуждении мы предположили, что величины $g^{\mu\nu}$ являются заданными функциями от координат. Но мы можем встать на другую точку зрения и рассматривать величины $g^{\mu\nu}$, как неизвестные функции, подчиненные уравнениям (45.11) и (45.12), выражающим свойства пространства-времени.

Решение этих уравнений дает для ковариантных составляющих фундаментального тензора выражения

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial x_\beta}, \tag{45.13}$$

содержащие четыре произвольные функции f_k. (Наличие в решении произвольных функций связано с тем, что уравнения для $g_{\alpha\beta}$ ковариантны по отношению к произвольному преобразованию координат).

Тот или иной выбор произвольных функций f_k не влияет на физические следствия теории, так как сводится к чисто математическому преобразованию уравнений к новым независимым переменным. Целесообразно, однако, ограничить выбор произвольных функций так, чтобы допустимые преобразования составляли возможно более узкую группу и чтобы основные уравнения теории получили возможно более простой вид. Если такое ограничение возможно (а это зависит уже от объективных свойств пространства-времени), то получаемые таким путем привилегированные координатные системы будут более непосредственно связаны с этими свойствами и будут допускать более прямое физическое толкование. В рассматриваемом здесь случае такой привилегированной системой является галилеева система координат, которая получается, если в общем решении (45.13) положить $f_k = x_k$.

Но можно оставить функции f_k неопределенными и формулировать уравнения физических процессов, не предрешая выбора независимых переменных. Так, например, закон распространения фронта волны будет тогда выражаться системой уравнений (45.06), (45.11), (45.12) для неизвестных функций ω и $g^{\mu\nu}$. Аналогично будет выражаться закон движения свободной материальной точки. Другие примеры такой общековариантной формулировки мы дадим в следующем параграфе.

14 Зак. 185. В. А. Фок