§ 46. Уравнения математической физики в произвольных координатах

Если известна тензорная форма тех или иных дифференциальных уравнений математической физики в галилеевых координатах, то в произвольных координатах соответствующие уравнения получатся путем простой замены обыкновенных производных ковариантными. Это правило применимо также и к уравнениям, содержащим вторые и высшие производные, так как, согласно общей формуле (43.21), при условии $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}=0$ ковариантное дифференцирование любого вектора или тензора коммутативно.

Рассмотрим сперва уравнения электродинамики.

Так как линейная дифференциальная форма (24.04)

$$\delta\varphi = A_\nu\, dx_\nu \tag{46.01}$$

есть инвариант, то входящие в нее составляющие потенциалов представляют ковариантный вектор также и по отношению к общим преобразованиям координат. Дифференциальное соотношение (24.05), налагаемое на составляющие потенциалов, может быть написано в виде

$$\nabla_\nu A^\nu = 0, \tag{46.02}$$

где A^ν — контравариантные составляющие

$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu. \tag{46.03}$$

Согласно (41.08), уравнение (46.02) в раскрытом виде напишется

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,A^\nu) = 0. \tag{46.04}$$

Связь между потенциалами и полем дается формулами

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \tag{46.05}$$

Но, как мы уже отмечали в § 41, при составлении разности (46.05) члены, отличающие ковариантные производные от обыкновенных, сокращаются, и мы будем иметь для антисимметричного тензора поля выражение

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{46.06}$$

совпадающее с (24.10). Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца, которая в обычных обозначениях имеет вид

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{46.07}$$

напишется теперь, согласно (24.17):

$$F_{\mu\nu\sigma} = 0, \tag{46.08}$$

где $F_{\mu\nu\sigma}$ — вполне антисимметричный *) тензор третьего ранга, который выражается через $F_{\mu\nu}$ по формуле

$$F_{\mu\nu\sigma}=\nabla_\sigma F_{\mu\nu}+\nabla_\mu F_{\nu\sigma}+\nabla_\nu F_{\sigma\mu}, \tag{46.09}$$

представляющей обобщение (24.12). Но, согласно формуле (41.28), это выражение равно

$$F_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{46.10}$$

так как тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен.

Таким образом, формула (24.12) остается без изменения. Напишем теперь в произвольных координатах вторую группу уравнений Максвелла — Лоренца, которая в обычных обозначениях имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho;\quad \operatorname{curl}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{46.11}$$

Согласно (21.20), левые части (46.11) представляют контравариантную расходимость тензора поля, которая в общих координатах напишется, согласно (41.25):

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}), \tag{46.12}$$

так как тензор поля антисимметричен. В правых частях (46.11) стоит умноженный на 4π контравариантный вектор тока, т. е. вектор

$$s^\mu=4\pi\rho^* u^\mu, \tag{46.13}$$

где ρ^* — инвариантная плотность, а u^μ — контравариантная скорость заряда. Таким образом, в общих координатах уравнения (46.11) примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)=s^\mu=4\pi\rho^* u^\mu, \tag{46.14}$$

причем из них вытекает закон сохранения заряда в форме

$$\nabla_\mu s^\mu=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sqrt{-g}\,s^\mu)=0. \tag{46.15}$$

Чтобы написать общековариантные уравнения движения заряженной материальной точки во внешнем поле, достаточно найти выражения для вектора ускорения. Если τ есть собственное время, то четырехмерная скорость равна

$$u^\nu=\frac{dx_\nu}{d\tau}, \tag{46.16}$$

причем

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=c^2. \tag{46.17}$$

*) Т. е. антисимметричный во всех своих значках.

Вектор ускорения w^ν будет совпадать с левой частью выражения (38.34), т. е. он будет равен

$$w^\nu = \frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{d\tau} \frac{dx_\beta}{d\tau}. \tag{46.18}$$

В самом деле, это выражение представляет вектор и переходит в галилеевых координатах в обычную формулу. Что касается выражения для лоренцовой силы, то оно уже написано нами в § 25 в ковариантной форме. Таким образом, уравнения движения будут иметь вид

$$w_\mu = -\frac{e}{mc} u^\nu F_{\mu\nu}, \tag{46.19}$$

где

$$w_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu \tag{46.20}$$

ковариантные составляющие ускорения.

В § 33 мы рассматривали тензор энергии электромагнитного поля и представили плотность лоренцовой силы в виде его расходимости (взятой с обратным знаком). Соответствующие формулы легко могут быть написаны в общековариантной форме.

Обобщением формулы (33.16) для тензора энергии электромагнитного поля являются выражения

$$U_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \tag{46.21}$$

$$U^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{46.22}$$

Используя уравнения Максвелла — Лоренца (46.08) и (46.14), мы получим после некоторых вычислений

$$\nabla_\nu U^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} s^\alpha. \tag{46.23}$$

Справа здесь стоит взятая с обратным знаком плотность лоренцовой силы. Общековариантные уравнения движения для сплошного распределения зарядов напишутся, аналогично (33.09), в виде

$$\mu^* w^\rho = -\frac{1}{4\pi} g^{\rho\sigma} F_{\sigma\alpha} s^\alpha, \tag{46.24}$$

где μ^* есть инвариантная плотность массы покоя, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla_\sigma (\mu^* u^\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\sqrt{-g}\, \mu^* u^\sigma) = 0. \tag{46.25}$$

Что касается ускорения w^ρ, то оно, согласно (46.18), может быть написано в виде

$$w^\rho = \frac{du^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} u^\sigma u^\alpha \tag{46.26}$$

или

$$w^\rho = u^\sigma \frac{\partial u^\rho}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} u^\sigma u^\alpha. \tag{46.27}$$

Последнее выражение равно

$$w^\rho = u^\sigma \nabla_\sigma u^\rho, \tag{46.28}$$

где $\nabla_\sigma u^\rho$ — ковариантная производная.

Если мы, аналогично (32.01), введем тензор массы заряженных частиц

$$\Theta^{\rho\sigma} = \frac{1}{c^2}\mu^* u^\rho u^\sigma \tag{46.29}$$

и воспользуемся законом сохранения массы покоя (46.25), то мы можем написать

$$\mu^* w^\rho = c^2 \nabla_\sigma \Theta^{\rho\sigma}. \tag{46.30}$$

В уравнениях движения (46.24) мы можем левую часть выразить в виде (46.30), а для правой воспользоваться выражением (46.23). Мы получим тогда

$$\nabla_\sigma T^{\rho\sigma} = 0, \tag{46.31}$$

где

$$c^2 T^{\rho\sigma} = \mu^* u^\rho u^\sigma + U^{\rho\sigma} \tag{46.32}$$

есть умноженный на c^2 тензор массы системы, состоящей из частиц и поля.

Подобным же образом мы можем написать общековариантные уравнения движения сплошной среды типа идеальной жидкости. Обозначая через μ^* инвариантную плотность массы покоя (включая ту ее часть, которая меняется вследствие изменения энергии сжатия), мы получим, аналогично (32.17), для полного тензора энергии (т. е. для умноженного на c^2 тензора массы) выражение:

$$c^2 T^{\rho\sigma} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^\rho u^\sigma - p g^{\rho\sigma}, \tag{46.33}$$

которое также удовлетворяет закону сохранения (46.31). Заметим, что равенство (46.25) теперь выполняться не будет, а будет выполняться лишь аналогичное равенство для величины ρ^*, связанной с μ^* соотношением (32.25) и представляющей инвариантную плотность сохраняющейся части массы покоя.

В § 31 мы установили общее правило, согласно которому тензор массы должен быть функцией состояния системы и не может зависеть явным образом от координат. Это правило относилось к галилеевым координатам, в которых величины $g^{\mu\nu}$ имеют заданные постоянные значения. Но мы можем сохранить это правило и для произвольных координат, если условимся включать в число функций состояния также и величины $g^{\mu\nu}$ (и, если понадобится, их первые производные). Во всех рассмотренных здесь примерах тензор массы подчиняется нашему обобщенному правилу. Так, в формуле (46.33) функциями состояния (которые, впрочем, не все независимы) являются: составляющие скорости u^ρ, давление p, инвариантная плотность μ^* и составляющие фундаментального тензора $g^{\rho\sigma}$. В тензоре энергии электромагнитного поля функциями состояния являются составляющие поля $F_{\alpha\beta}$ и величины $g^{\mu\nu}$.

§ 47. Вариационное начало для системы уравнений Максвелла — Лоренца

Многие уравнения математической физики могут быть формулированы как условия экстремума некоторого интеграла, который носит название интеграла действия. Один из простейших примеров такой формулировки представляют уравнения геодезической линии, рассмотренные в § 38. Мы разберем теперь более сложный пример системы уравнений Максвелла — Лоренца, описывающей движение сплошной заряженной среды, элементы которой взаимодействуют через посредство электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла — Лоренца для компонент поля $F_{\mu\nu}$, компонент четырехмерной скорости среды u^ν, инвариантной плотности массы покоя μ^* и инвариантной плотности заряда ρ^* имеет вид:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{47.01}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\rho^* u^\mu, \tag{47.02}$$

$$\mu^* w_\alpha + \frac{\rho^*}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \tag{47.03}$$

Здесь w_α есть ковариантная компонента вектора ускорения, контравариантные компоненты которого равны

$$w^\alpha = u^\nu \nabla_\nu u^\alpha. \tag{47.04}$$

Инвариантные плотности μ^* и ρ^* удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\alpha (\mu^* u^\alpha) = 0, \tag{47.05}$$

$$\nabla_\alpha (\rho^* u^\alpha) = 0, \tag{47.06}$$

из которых второе есть следствие (47.02).

Нам надлежит составить такой интеграл действия, чтобы его вариация по входящим в него функциям давала написанные выше уравнения.

Мы можем облегчить себе задачу введением вспомогательных функций, выбранных так, чтобы некоторые из уравнений выполнялись тождественно; тогда вариация должна дать остальные уравнения.