производные). Во всех рассмотренных здесь примерах тензор массы подчиняется нашему обобщенному правилу. Так, в формуле (46.33) функциями состояния (которые, впрочем, не все независимы) являются: составляющие скорости u^ρ, давление p, инвариантная плотность μ^* и составляющие фундаментального тензора $g^{\rho\sigma}$. В тензоре энергии электромагнитного поля функциями состояния являются составляющие поля $F_{\alpha\beta}$ и величины $g^{\mu\nu}$.

§ 47. Вариационное начало для системы уравнений Максвелла — Лоренца

Многие уравнения математической физики могут быть формулированы как условия экстремума некоторого интеграла, который носит название интеграла действия. Один из простейших примеров такой формулировки представляют уравнения геодезической линии, рассмотренные в § 38. Мы разберем теперь более сложный пример системы уравнений Максвелла — Лоренца, описывающей движение сплошной заряженной среды, элементы которой взаимодействуют через посредство электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла — Лоренца для компонент поля $F_{\mu\nu}$, компонент четырехмерной скорости среды u^ν, инвариантной плотности массы покоя μ^* и инвариантной плотности заряда ρ^* имеет вид:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{47.01}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \rho^* u^\mu, \tag{47.02}$$

$$\mu^* w_\alpha + \frac{\rho^*}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \tag{47.03}$$

Здесь w_α есть ковариантная компонента вектора ускорения, контравариантные компоненты которого равны

$$w^\alpha = u^\nu \nabla_\nu u^\alpha. \tag{47.04}$$

Инвариантные плотности μ^* и ρ^* удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\alpha (\mu^* u^\alpha) = 0, \tag{47.05}$$

$$\nabla_\alpha (\rho^* u^\alpha) = 0, \tag{47.06}$$

из которых второе есть следствие (47.02).

Нам надлежит составить такой интеграл действия, чтобы его вариация по входящим в него функциям давала написанные выше уравнения.

Мы можем облегчить себе задачу введением вспомогательных функций, выбранных так, чтобы некоторые из уравнений выполнялись тождественно; тогда вариация должна дать остальные уравнения.

С этой целью мы введем потенциалы и перемещения частиц среды и через эти функции выразим остальные.

Полагая

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{47.07}$$

мы тождественно удовлетворим уравнениям (47.01). Потенциалы A_ν мы и будем рассматривать как функции, подлежащие вариации.

Для описания движения среды мы введем переменные Лагранжа a_1, a_2, a_3 и $a_0 = p$, где a_1, a_2, a_3 представляют, например, начальные координаты частицы среды, а p — параметр, имеющий характер времени. Вариации будут подлежать функции

$$x_\alpha = f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3), \tag{47.08}$$

которые дают, при постоянных a_1, a_2, a_3 и переменном p, движение данной частицы жидкости. Вариации этих функций (т. е. вариации перемещений) мы будем называть смещениями и обозначать через ξ^α:

$$\xi^\alpha = \delta x_\alpha = \delta f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3). \tag{47.09}$$

Такое обозначение оправдывается тем, что эти вариации представляют бесконечно малый контравариантный вектор. Величины ξ^α мы будем, вообще говоря, рассматривать, как функции не от лагранжевых переменных (p, a_1, a_2, a_3), а от координат (x_0, x_1, x_2, x_3), связанных с лагранжевыми переменными соотношениями (47.08).

Составляющие четырехмерной скорости выразятся через лагранжевы переменные по формуле

$$u^\alpha = c\frac{\partial f_\alpha}{\partial p} \Big/ \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}, \tag{47.10}$$

причем соотношение

$$u_\alpha u^\alpha = c^2 \tag{47.11}$$

будет удовлетворено тождественно. В формуле (47.10) величины $g_{\mu\nu}$ имеют аргументами $x_\alpha = f_\alpha$, так что при варьировании f_α нужно учитывать также и изменение $g_{\mu\nu}$.

Введение лагранжевых переменных позволяет тождественно удовлетворить уравнению неразрывности (47.05) выражениями (47.10) для скорости и выражением для инвариантной плотности, определяемым из равенства

$$\mu^*\sqrt{-g}\cdot I = F(a_1, a_2, a_3)\cdot\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}, \tag{47.12}$$

где I есть абсолютное значение якобиана

$$I = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(p, a_1, a_2, a_3)}. \tag{47.13}$$

Обозначим через $\delta_1 u^\alpha$ и $\delta_1\mu^*$ вариации, соответствующие изменению вида функций f_α. Величина $u^\alpha + \delta_1 u^\alpha$ есть скорость измененного движения, взятая в точке $x_\alpha + \xi^\alpha$. Скорость же измененного движения, взятая в точке x_α, будет

$$u^\alpha + \delta u^\alpha = u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma + \delta_1 u^\alpha. \tag{47.14}$$

Таким образом, та вариация δu^α, которая соответствует изменению вида поля скоростей, будет равна

$$\delta u^\alpha = \delta_1 u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma. \tag{47.15}$$

Заметим, что вариация $\delta_1 u^\alpha$ есть разность значений двух векторов, взятых в разных точках; поэтому она не будет вектором. Напротив того, вариация δu^α есть разность значений двух векторов для одной и той же точки. Поэтому δu^α есть вектор. Аналогично можно ввести вариации $\delta_1\mu^*$ и $\delta\mu^*$ для инвариантной плотности. Они будут связаны соотношением

$$\delta\mu^* = \delta_1\mu^* - \frac{\partial\mu^*}{\partial x^\sigma}\xi^\sigma. \tag{47.16}$$

Для вычисления вариации $\delta_1\mu^*$ нам нужно найти вариацию δ_1 от обеих частей равенства (47.12). Мы имеем

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p} + g_{\mu\sigma}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial p}\right). \tag{47.17}$$

Подставляя сюда

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial p} = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial p} \tag{47.18}$$

и пользуясь выражением (47.10) для скоростей, будем иметь

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) =$$

$$= \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}\cdot\frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma + g_{\mu\sigma}\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu}\right). \tag{47.19}$$

Применяя формулу

$$\nabla_\nu\xi^\sigma = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\xi^\rho \tag{47.20}$$

для ковариантной производной, мы можем предыдущее выражение написать в виде

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}\cdot\frac{1}{c^2}u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma. \tag{47.21}$$

Вариация правой части (47.12) будет пропорциональна этому выражению. Далее, варьированное значение якобиана I будет равно

$$I+\delta_1 I=\frac{D\left(x_0+\xi^0,\, x_1+\xi^1,\, x_2+\xi^2,\, x_3+\xi^3\right)}{D\left(p,\, a_1,\, a_2,\, a_3\right)}=$$

$$=\frac{D\left(x_0+\xi^0, \ldots\right)}{D\left(x_0, \ldots\right)} \cdot I=\left(1+\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\right) I, \tag{47.22}$$

откуда

$$\delta_1 I=\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha} \cdot I. \tag{47.23}$$

Затем мы имеем

$$\delta_1(\sqrt{-g})=\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha \tag{47.24}$$

и, следовательно,

$$\delta_1(\sqrt{-g} I)=\frac{\partial\left(\sqrt{-g} \xi^\alpha\right)}{\partial x_\alpha} I \tag{47.25}$$

или

$$\delta_1(\sqrt{-g} I)=\nabla_\alpha \xi^\alpha \cdot \sqrt{-g} I. \tag{47.26}$$

Используя формулы (47.21) и (47.26), мы можем написать вариацию δ_1 от логарифма обеих частей (47.12) в виде

$$\frac{\delta_1 \mu^*}{\mu^*}+\nabla_\sigma \xi^\sigma=\frac{1}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.27}$$

откуда

$$\delta_1 \mu^*=-\mu^* \nabla_\sigma \xi^\sigma+\frac{\mu^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.28}$$

и по формуле (47.16)

$$\delta \mu^*=-\nabla_\sigma\left(\mu^* \xi^\sigma\right)+\frac{\mu^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.29}$$

При вычислении вариации δ_1 от выражения (47.10) для u^α мы можем воспользоваться результатом (47.21). Вычисление дает

$$\delta_1 u^\alpha=u^\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\nu}-u^\alpha \cdot \frac{1}{c^2} \cdot u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma \tag{47.30}$$

и по формуле (47.15)

$$\delta u^\alpha=u^\sigma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma-\frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.31}$$

Последнее выражение можно написать в виде

$$\delta u^\alpha=u^\sigma \nabla_\sigma \xi^\alpha-\xi^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha-\frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.32}$$

откуда ясно, что δu^α есть вектор. При этом будет

$$u_\alpha \delta u^\alpha=0 \tag{47.33}$$

в согласии с (47.11).

Так как плотность заряда ρ^* удовлетворяет такому же уравнению неразрывности (47.06), как плотность массы μ^*, то ее вариация будет иметь вид, аналогичный (47.29), а именно:

$$\delta\rho^* = -\nabla_\sigma(\rho^*\xi^\sigma) + \frac{\rho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.34}$$

Комбинируя формулы (47.32) и (47.34) и пользуясь (47.06), получаем

$$\delta(\rho^* u^\alpha) = \nabla_\sigma(\rho^* u^\sigma \xi^\alpha - \rho^* u^\alpha \xi^\sigma) \tag{47.35}$$

или

$$\delta(\rho^* u^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[\sqrt{-g}\, \rho^* (u^\sigma \xi^\alpha - u^\alpha \xi^\sigma)\right], \tag{47.36}$$

откуда следует, что варьированный вектор тока также удовлетворяет уравнению неразрывности, что и следовало ожидать.

Заметим, что если смещения ξ^σ пропорциональны скорости, так что $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$, где τ есть произвольная функция от координат, то варьированное поле скоростей, а также варьированная плотность, не отличаются от неварьированной. Это можно проверить непосредственным вычислением; подстановка $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$ в наши формулы дает $\delta u^\alpha = 0$, $\delta\mu^* = 0$ и $\delta\rho^* = 0$.

После того, как вычислены вариации различных величин, соответствующие смещениям ξ^σ, легко проверить, что уравнения поля (47.02) и уравнения движения (47.03) являются условиями экстремума интеграла

$$S = \int \left(c^2\mu^* - \frac{\rho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \sqrt{-g}\,(dx), \tag{47.37}$$

где для краткости положено

$$(dx) = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{47.38}$$

Интеграл (47.37) взят по некоторой четырехмерной области, на границе которой вариации ξ^α и δA_α исчезают.

Вычислим сперва вариацию последнего члена в (47.37). Как легко проверить, мы имеем

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = 2F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta}. \tag{47.39}$$

Поэтому

$$\frac{1}{16\pi} \delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \\ = \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.40}$$

Так как тензор $F^{\alpha\beta}$ антисимметричен, то оба члена в скобках дают одно и то же. Поэтому мы имеем

$$\frac{1}{16\pi} \delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = -\frac{1}{4\pi} \int F^{\alpha\beta} \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{-g}\, F^{\alpha\beta}\right) \cdot \delta A_\alpha\,(dx) \tag{47.41}$$

после интегрирования по частям.

Вариация второго члена в (47.37) равна, вследствие (47.36),

$$-\frac{1}{c}\delta\int\rho^* u^\alpha A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) = -\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha \delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) - \\ -\frac{1}{c}\int A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\,\rho^*(u^\sigma\xi^\alpha - u^\alpha\xi^\sigma)\right](dx). \tag{47.42}$$

Производя интегрирование по частям, получим для последнего интеграла в (47.42) выражение

$$\frac{1}{c}\int\rho^*(u^\sigma\xi^\alpha - u^\alpha\xi^\sigma)\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma}\sqrt{-g}\,(dx) = \\ = -\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha\xi^\sigma\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\alpha}\right)\sqrt{-g}\,(dx) = \\ = -\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha F_{\sigma\alpha}\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.43}$$

Таким образом, второй член дает

$$-\frac{1}{c}\delta\int\rho^* u^\alpha A_\alpha\sqrt{-g}\,(dx) = \\ = -\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha(\delta A_\alpha + F_{\sigma\alpha}\xi^\sigma)\sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.44}$$

Наконец, вариация первого члена в (47.37) на основании формулы (47.29) равна

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx) = \int\left[-c^2\nabla_\sigma(\mu^*\xi^\sigma) + \mu^* u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma\right]\sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.45}$$

После интегрирования по частям член, пропорциональный c^2 (в правой части), дает нуль, а остающийся член дает

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx) = -\int\mu^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.46}$$

В самом деле, вследствие уравнения неразрывности (47.05) мы имеем

$$\mu^* u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma = \nabla_\nu(\mu^* u_\sigma u^\nu\xi^\sigma) - \mu^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma, \tag{47.47}$$

а интеграл от первого члена здесь дает нуль.

Вводя, согласно (47.04), обозначение

$$w_\sigma = u^\nu\nabla_\nu u_\sigma \tag{47.48}$$

для ускорения, мы будем иметь

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx) = -\int\mu^* w_\sigma\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.49}$$

Соединяя вместе формулы (47.41), (47.44) и (47.49), получаем следующее окончательное выражение для вариации интеграла действия (47.37):

$$\delta S = -\int \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int \left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) \delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.50}$$

Здесь коэффициенты при ξ^σ и δA_α равны нулю в силу уравнений движения (47.03) и уравнений поля (47.02). Тем самым доказано, что

$$\delta S = 0. \tag{47.51}$$

Обратно, из условия экстремума интеграла действия

$$S = \int \left(c^2 \mu^* - \frac{\rho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \sqrt{-g}\,(dx) \tag{47.37}$$

можно заключить, в силу произвольности вариаций ξ^σ и δA_α, о выполнении уравнений движения и уравнений поля.

То обстоятельство, что вариации вида $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$ не меняют поля скоростей, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$u^\sigma \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) = 0, \tag{47.52}$$

причем оно выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений движения. Это соотношение показывает, что из четырех уравнений движения — только три независимых. То обстоятельство, что вариации вида $\delta A_\alpha = \delta \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ не меняют электромагнитного поля, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$\nabla_\alpha \left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{47.53}$$

причем оно также выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений поля. Это соотношение показывает, что четыре уравнения поля не независимы, а связаны дифференциальным соотношением (47.53).

§ 48. Вариационный принцип и тензор энергии

В § 45 мы указывали, что при формулировке теории относительности в произвольных координатах возможны две точки зрения. Согласно первой точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как заданные функции от координат (получаемые путем замены переменных из галилеевых значений). Согласно второй точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как неизвестные функции, подчиненные уравнениям

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0, \tag{48.01}$$