действия (47.37):

$$\delta S = -\int\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right)\xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int\left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right)\delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.50}$$

Здесь коэффициенты при ξ^σ и δA_α равны нулю в силу уравнений движения (47.03) и уравнений поля (47.02). Тем самым доказано, что

$$\delta S = 0. \tag{47.51}$$

Обратно, из условия экстремума интеграла действия

$$S = \int\left(c^2\mu^* - \frac{\rho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,(dx) \tag{47.37}$$

можно заключить, в силу произвольности вариаций ξ^σ и δA_α, о выполнении уравнений движения и уравнений поля.

То обстоятельство, что вариации вида $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$ не меняют поля скоростей, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$u^\sigma\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) = 0, \tag{47.52}$$

причем оно выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений движения. Это соотношение показывает, что из четырех уравнений движения — только три независимых. То обстоятельство, что вариации вида $\delta A_\alpha = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ не меняют электромагнитного поля, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$\nabla_\alpha\left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{47.53}$$

причем оно также выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений поля. Это соотношение показывает, что четыре уравнения поля не независимы, а связаны дифференциальным соотношением (47.53).

§ 48. Вариационный принцип и тензор энергии

В § 45 мы указывали, что при формулировке теории относительности в произвольных координатах возможны две точки зрения. Согласно первой точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как заданные функции от координат (получаемые путем замены переменных из галилеевых значений). Согласно второй точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как неизвестные функции, подчиненные уравнениям

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0, \tag{48.01}$$

а также неравенствам, неоднократно нами формулированным.

При вычислении вариации интеграла действия мы стояли на первой точке зрения, сообразно чему вид функций $g_{\mu\nu}$ не варьировался. Но мы можем встать и на вторую точку зрения и варьировать также $g_{\mu\nu}$. От этого в выражении (47.50) для δS к вычисленным двум членам, соответствующим вариациям ξ^{σ} и δA_{α}, прибавится третий член, который будет соответствовать вариации $g_{\mu\nu}$. Вычислим этот член.

Обозначим вариации разных величин, происходящие от вариации $g_{\mu\nu}$, символом δ_g. В выражении (47.12) ни якобиан I, ни функция F величин $g_{\mu\nu}$ не содержат; поэтому будет

$$\frac{\delta_g(\mu^*\sqrt{-g})}{\mu^*\sqrt{-g}} = \frac{\dfrac{\partial f_{\mu}}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial f_{\nu}}{\partial p}\,\delta g_{\mu\nu}}{2g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial f_{\alpha}}{\partial p}\,\dfrac{\partial f_{\beta}}{\partial p}} = \frac{1}{2c^2}\,u^{\mu}u^{\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{48.02}$$

и, следовательно,

$$\delta_g\left(\mu^*\sqrt{-g}\right) = \frac{\mu^*\sqrt{-g}}{2c^2}\,u^{\mu}u^{\nu}\,\delta g_{\mu\nu}. \tag{48.03}$$

Далее, легко видеть, что

$$\delta_g\left(\rho^* u^{\alpha}\sqrt{-g}\right) = 0, \tag{48.04}$$

а также

$$\delta_g\left(\rho^* u^{\alpha}A_{\alpha}\sqrt{-g}\right) = 0, \tag{48.05}$$

поскольку A_{α} теперь не варьируются.

Далее

$$\delta_g(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta}\,\delta_g F^{\alpha\beta}, \tag{48.06}$$

так как $F_{\alpha\beta}$ не варьируются, а варьируются только $F^{\alpha\beta}$, поскольку они связаны с $F_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu}, \tag{48.07}$$

содержащими $g_{\mu\nu}$. Вычисление дает

$$F_{\alpha\beta}\,\delta_g F^{\alpha\beta} = 2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}\,\delta g^{\beta\nu} = -2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\,\delta g_{\mu\nu}. \tag{48.08}$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_g\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}, \tag{48.09}$$

то мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) =$$
$$= \left(-2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} = 8\pi U^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \tag{48.10}$$

где $U^{\mu\nu}$ есть выражение (46.22) для тензора энергии электромагнитного поля.

Формулы (48.03), (48.05) и (48.10) дают для добавочного члена в вариации интеграла действия выражение

$$\delta_g S = \frac{1}{2} \int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}) \, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \, (dx). \tag{48.11}$$

Но, согласно (46.32), выражение в скобках под интегралом есть умноженный на c^2 тензор массы системы, состоящей из частиц и поля

$$c^2 T^{\mu\nu} = \mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}. \tag{48.12}$$

Таким образом, выражение для тензора массы получается само собою, путем варьирования интеграла действия по составляющим фундаментального тензора.

Полная вариация интеграла действия по всем входящим в него функциям равна

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2} \int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}) \, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \, (dx) - \\ - \int \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha \right) \xi^\sigma \sqrt{-g} \, (dx) + \\ + \int \left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} \right) \delta A_\alpha \sqrt{-g} \, (dx). \end{aligned} \tag{48.13}$$

Вариации ξ^σ и δA_α были вполне произвольными; приравнивая нулю коэффициенты при них, мы получили уравнения движения и уравнения поля. Вариации же $\delta g_{\mu\nu}$ не являются произвольными, так как функции $g_{\mu\nu}$ подчинены уравнениям

$$R_{\mu\nu, \alpha\beta} = 0. \tag{48.01}$$

Выразим вариации $\delta g_{\mu\nu}$ через независимые произвольные величины.

Самый общий вид функций $g_{\mu\nu}$, удовлетворяющих уравнениям (48.01), получается из галилеевых значений этих функций путем преобразования координат. Следовательно, все возможные виды функций $g_{\mu\nu}$, совместные с уравнениями (48.01), получаются друг из друга также преобразованием координат. Таким образом, допустимые бесконечно малые вариации этих функций должны соответствовать бесконечно малому преобразованию координат.

Пусть бесконечно малое преобразование координат имеет вид

$$x'_\alpha = x_\alpha + \eta^\alpha, \tag{48.14}$$

где η^α есть произвольный бесконечно малый вектор, составляющие которого суть функции от координат x_0, x_1, x_2, x_3. По общей формуле преобразования тензора мы имеем

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \tag{48.15}$$

и с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\alpha}\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x_\alpha}. \tag{48.16}$$

Чтобы получить вариацию, т. е. изменение вида функции $g^{\mu\nu}$, нужно сравнивать $g'^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ для одних и тех же значений аргументов.

Так как мы имеем

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma \tag{48.17}$$

(в поправочном члене можно написать $g^{\mu\nu}$ вместо $g'^{\mu\nu}$), то будет

$$g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) = \delta g^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma. \tag{48.18}$$

Эта формула может быть написана в виде

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha \eta^\nu + g^{\nu\alpha}\nabla_\alpha \eta^\mu, \tag{48.19}$$

или короче:

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu \eta^\nu + \nabla^\nu \eta^\mu. \tag{48.20}$$

Аналогичная формула

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \eta_\nu - \nabla_\nu \eta_\mu \tag{48.21}$$

может быть получена или независимо (тем же путем) или из соотношения $g_{\mu\alpha}g^{\mu\nu} = \delta_\alpha^\nu$.

Переписывая формулу (48.11) в виде

$$\delta_g S = \frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) \tag{48.22}$$

и подставляя сюда (48.21), получим

$$\delta_g S = -\frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\mu \eta_\nu + \nabla_\nu \eta_\mu)\sqrt{-g}\,(dx) =$$

$$= -c^2\int T^{\mu\nu}\nabla_\nu \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx), \tag{48.23}$$

так как тензор $T_{\mu\nu}$ симметричен. После интегрирования по частям получаем

$$\delta_g S = c^2\int (\nabla_\nu T^{\mu\nu})\,\eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.24}$$

Если считать известным, что расходимость тензора массы равняется нулю, то из формулы (48.24) можно заключить, что интеграл действия является экстремумом также и по отношению к допустимым вариациям величин $g_{\mu\nu}$. Но можно сделать и обратное заключение и вывести из свойств интеграла действия равенство

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{48.25}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть тензор, входящий в качестве коэффициента при $\delta g_{\mu\nu}$ в выражение для его полной вариации. В самом деле, интеграл действия есть инвариант (скаляр) и потому не меняется при любых, в том числе бесконечно малых, преобразованиях координат. Выражение для его полной вариации

$$\begin{aligned} \delta S = c^2 \int (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx) - \\ - \int \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha}\right) \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int \left(-\frac{\rho}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) \delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) \end{aligned} \tag{48.26}$$

заведомо равно нулю, если вариации ξ^σ и δA_α происходят вследствие бесконечно малого преобразования η_μ. (Это заключение вытекает из одного лишь свойства инвариантности и не зависит от того, будет ли S интегралом действия или каким-нибудь другим инвариантным интегралом.) Но если S есть интеграл действия, то коэффициенты при ξ^σ и δA_α в выражении для δS в отдельности равны нулю. Поэтому равны нулю и остальные члены в выражении для δS и мы имеем

$$\delta_g S = c^2 \int (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx) = 0, \tag{48.27}$$

каковы бы ни были величины η_μ. Отсюда уже следует равенство (48.25).

То, что тензор $T^{\mu\nu}$, определяемый как коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}$, есть тензор массы (или ему пропорционален), вытекает из установленной в § 31 единственности тензора массы, имеющей место при условии, что его составляющие суть функции состояния системы (в число функций состояния включаются здесь и $g_{\mu\nu}$). В рассматриваемом случае уравнений Максвелла — Лоренца мы это проверили непосредственным вычислением [формула (48.12)].

Проиллюстрируем приведенные рассуждения еще на одном примере, а именно на уравнениях гидродинамики. В этом случае интеграл действия будет иметь вид

$$S = \int (\rho^* c^2 + \rho^* \Pi) \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.28}$$

Здесь ρ^* есть инвариантная плотность той части массы покоя, которая при движении не меняется и удовлетворяет закону сохранения

$$\nabla_\nu(\rho^* u^\nu) = 0 \tag{48.29}$$

(см. § 32). П есть отнесенная к единице массы потенциальная энергия упругого сжатия жидкости

$$\Pi = \int\limits_0^p \frac{dp}{\rho^*} - \frac{p}{\rho^*}; \qquad d\Pi = \frac{p\,d\rho^*}{\rho^{*2}}, \tag{48.30}$$

где p — давление.

Вариацию интеграла S легко вычислить, пользуясь найденными выше выражениями для вариации плотности. На основании формул (47.29), (48.03) и (48.09), в которых мы пишем теперь ρ^* вместо μ^*, мы имеем для полной вариации

$$\delta\rho^* = -\nabla_\sigma(\rho^*\xi^\sigma) + \frac{\rho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma + \frac{\rho^*}{2}\left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{48.31}$$

и попрежнему

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{48.32}$$

Полагая

$$F(\rho^*) = \rho^* c^2 + \rho^*\Pi, \tag{48.33}$$

мы будем иметь

$$\delta S = \delta\int F(\rho^*)\sqrt{-g}\,(dx) = \int\left[F'(\rho^*)\,\delta\rho^* + F(\rho^*)\frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right]\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.34}$$

Подставляя сюда (48.31) и (48.32), мы получим, после интегрирования по частям:

$$\delta S = \frac{1}{2}\int\left[(F - \rho^* F')\,g^{\mu\nu} + \rho^* F' \cdot \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) + \int\left[\rho^* F''\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial\rho^*}{\partial x_\nu}\right) - \frac{1}{c^2}\rho^* F' w_\sigma\right]\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx), \tag{48.35}$$

где w_σ есть ускорение (47.48). Пользуясь вытекающими из (48.30) и (48.33) формулами

$$\rho^* F' - F = p; \qquad \rho^* F''\,d\rho^* = dp, \tag{48.36}$$

мы можем вместо (48.35) написать

$$\delta S = \frac{1}{2}\int\left\{-p g^{\mu\nu} + \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right]u^\mu u^\nu\right\}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) + \int\left\{\frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x_\nu} - \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right]w_\sigma\right\}\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.37}$$

Отсюда заключаем, что уравнения движения имеют вид

$$\left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] w_\sigma = \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_\nu} \tag{48.38}$$

и что тензор энергии равен

$$c^2 T^{\mu\nu} = \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \tag{48.39}$$

причем расходимость этого тензора равна нулю.

Эти выражения представляют обобщения выражений (32.29) и (32.28) и приводятся к ним в галилеевых координатах.

В заключение заметим, что математически далеко не всякая система уравнений выводима из вариационного начала. То обстоятельство, что основные уравнения математической физики, описывающие поведение консервативных систем, могут быть получены из вариационного начала, представляет замечательное их свойство.

§ 49. Интегральная форма законов сохранения в произвольных координатах

Тензор массы $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет, как мы знаем, уравнениям

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{49.01}$$

которые должны выражать законы сохранения энергии и количества движения, а также закон сохранения момента количества движения и закон движения центра инерции замкнутой консервативной системы.

В развернутом виде уравнения (49.01) напишутся [см. (41.24)]:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^{\mu\rho} = 0 \tag{49.02}$$

или, если объединить третий член с первым,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu})}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} = 0. \tag{49.03}$$

Вследствие того, что в уравнении (49.03) остается член, стоящий вне знака производных, переход от дифференциальной формы законов сохранения к интегральной форме не является в произвольных координатах столь очевидным, каким он был в галилеевых координатах (см. § 31). Поэтому мы рассмотрим вопрос о существовании интегральной формы законов сохранения несколько подробнее.

Введем некоторый вектор φ_μ и проинтегрируем равенство

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\varphi_\mu) \tag{49.04}$$