Отсюда заключаем, что уравнения движения имеют вид

$$\left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] w_\sigma = \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x_\nu} \tag{48.38}$$

и что тензор энергии равен

$$c^2 T^{\mu\nu} = \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \tag{48.39}$$

причем расходимость этого тензора равна нулю.

Эти выражения представляют обобщения выражений (32.29) и (32.28) и приводятся к ним в галилеевых координатах.

В заключение заметим, что математически далеко не всякая система уравнений выводима из вариационного начала. То обстоятельство, что основные уравнения математической физики, описывающие поведение консервативных систем, могут быть получены из вариационного начала, представляет замечательное их свойство.

§ 49. Интегральная форма законов сохранения в произвольных координатах

Тензор массы $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет, как мы знаем, уравнениям

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{49.01}$$

которые должны выражать законы сохранения энергии и количества движения, а также закон сохранения момента количества движения и закон движения центра инерции замкнутой консервативной системы.

В развернутом виде уравнения (49.01) напишутся [см. (41.24)]:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^{\mu\rho} = 0 \tag{49.02}$$

или, если объединить третий член с первым,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu})}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} = 0. \tag{49.03}$$

Вследствие того, что в уравнении (49.03) остается член, стоящий вне знака производных, переход от дифференциальной формы законов сохранения к интегральной форме не является в произвольных координатах столь очевидным, каким он был в галилеевых координатах (см. § 31). Поэтому мы рассмотрим вопрос о существовании интегральной формы законов сохранения несколько подробнее.

Введем некоторый вектор φ_μ и проинтегрируем равенство

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\varphi_\mu) \tag{49.04}$$

по трехмерному объему, на границах которого величины $T^{\mu\nu}$ исчезают. Мы получим

$$\int \nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu)\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \quad (49.05)$$

Если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то он симметричен и расходимость его равна нулю. Для такого тензора предыдущее равенство напишется:

$$\frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = $$
$$= \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\nu\varphi_\mu + \nabla_\mu\varphi_\nu)\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2 dx_3. \quad (49.06)$$

Величина

$$I = \int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \quad (49.07)$$

будет постоянной (т. е. не будет зависеть от координаты x_0, имеющей характер времени), если вектор φ_μ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_\nu\varphi_\mu + \nabla_\mu\varphi_\nu = 0. \quad (49.08)$$

Исследуем эти уравнения в общем случае (не предполагая сперва, что тензор кривизны четвертого ранга равен нулю).

Положим

$$\nabla_\nu\varphi_\mu = \varphi_{\mu\nu}. \quad (49.09)$$

В силу (49.08) величины $\varphi_{\mu\nu}$ будут антисимметричным тензором. Составим от него ковариантную производную. Используя (49.08), мы можем написать

$$\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\varphi_\sigma + \frac{1}{2}(\nabla_\sigma\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\sigma)\varphi_\mu - \frac{1}{2}(\nabla_\sigma\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\sigma)\varphi_\nu. \quad (49.10)$$

Применяя формулу (43.16) для разности ковариантных производных и используя свойства симметрии тензора $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$, мы получим

$$\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma,\,\mu\nu}\varphi_\rho. \quad (49.11)$$

Таким образом, уравнения (49.08) могут быть заменены системой (49.09) и (49.11), которая равносильна системе уравнений в полных дифференциалах. Можно показать, что эта система будет вполне интегрируема в том случае, когда

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = K\cdot(g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}), \quad (49.12)$$

где K — постоянная. Пространство, для которого тензор кривизны имеет выражение (49.12), называется пространством постоянной кривизны (оно представляет четырехмерное обобщение пространства Лобачевского). Постоянная K носит название постоянной кривизны.

Если условия полной интегрируемости выполнены, то значения 10 функций φ_μ, $\varphi_{\mu\nu}$ во всем пространстве определяются их значениями в одной точке, так что общее решение системы (49.09), (49.11) содержит 10 произвольных постоянных.

Нас интересует случай

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0, \tag{49.13}$$

который получается из (49.12) при $K = 0$. (Пространство, для которого $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0$, называется поэтому пространством нулевой кривизны или плоским пространством.)

В случае плоского пространства-времени (с которым и имеет дело теория относительности) мы можем сразу указать 10 интегралов системы (49.03). Пусть x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 — галилеевы координаты. Мы можем ввести четыре вектора:

$$\varphi^{(0)}_{\cdot\mu} = \frac{\partial x'_0}{\partial x_\mu}; \quad \varphi^{(1)}_{\cdot\mu} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_\mu}; \quad \varphi^{(2)}_{\cdot\mu} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_\mu}; \quad \varphi^{(3)}_{\cdot\mu} = \frac{\partial x'_3}{\partial x_\mu}. \tag{49.14}$$

(Эти величины будут векторами по отношению к нештрихованным координатам x_0, x_1, x_2, x_3; галилеевы же координаты здесь рассматриваются как скаляры). Каждый из четырех векторов (49.14) удовлетворяет, в силу (42.16), уравнениям

$$\nabla_\nu \varphi^{(\alpha)}_{\cdot\mu} = 0 \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{49.15}$$

а следовательно, и уравнениям (49.08).

Далее, мы можем ввести шесть векторов

$$\varphi^{(\alpha\beta)}_{\cdot\mu} = x'_\alpha \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} - x'_\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}, \tag{49.16}$$

из которых каждый удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_\nu \varphi^{(\alpha\beta)}_{\cdot\mu} + \nabla_\mu \varphi^{(\alpha\beta)}_{\cdot\nu} = 0, \tag{49.17}$$

т. е. уравнениям (49.08).

Подставляя в выражение (49.07) векторы (49.14), получим, после умножения на c, постоянные интегралы

$$P'^\alpha = c \int T^{\mu 0} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{49.18}$$

а подставляя в то же выражение векторы (49.16), получим постоянные интегралы

$$M'^{\alpha\beta} = c \int T^{\mu 0} \left(x'_\alpha \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} - x'_\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \right) \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{49.19}$$

Из сравнения этих выражений с соответствующими выражениями в галилеевых координатах [формулы (31.02), (31.03), а также (31.08), (31.09)] нетрудно установить физический смысл этих интегралов. Величина P'^0 есть деленная на c энергия (или умноженная на c масса) системы, а величины P'^i ($i = 1, 2, 3$) представляют количество движения системы. Далее, величины M'^{i0} суть интегралы движения центра инерции, а величины M'^{ik} — интегралы момента количества движения системы.

Составляющие P'^α постоянного вектора и составляющие $M'^{\alpha\beta}$ постоянного антисимметричного тензора относятся к галилеевой координатной системе. Но постоянному вектору или тензору в галилеевой системе соответствует в произвольной координатной системе *свободный* вектор или тензор, т. е. такой, все ковариантные производные от которого равны нулю. Таким образом, интегралам движения мы можем сопоставить в произвольной координатной системе свободный вектор

$$P_\nu = \sum_{\alpha=0}^{3} e_\alpha P'^\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} \tag{49.20}$$

и свободный антисимметричный тензор

$$M_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} e_\alpha e_\beta M'^{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \tag{49.21}$$

Эти величины будут функциями от координат и времени, удовлетворяющими уравнениям

$$\nabla_\sigma P_\nu = 0; \quad \nabla_\sigma M_{\mu\nu} = 0. \tag{49.22}$$

Значения этих функций в любой точке определяются значениями их в какой-нибудь одной точке. Поэтому число постоянных, от которых зависят функции P_ν и $M_{\mu\nu}$, будет равно числу этих функций, т. е. будет равно 10. Роль этих постоянных и играют константы движения P'^α и $M'^{\alpha\beta}$.

В приведенных рассуждениях роль галилеевых координат была чисто вспомогательная и заключалась в том, что через них выражались векторы φ_μ, соответствующие различным интегралам уравнений (49.08). Разумеется, гораздо проще было бы вести все рассуждения прямо в галилеевых координатах (как мы это делали в главе II). Но цель наших более сложных рассуждений как раз и состояла в том, чтобы показать, что также и интегральная форма законов сохранения может быть получена непосредственно из уравнений, написанных в произвольных координатах.