Заметим, что уравнения движения (50.09) могут быть получены из вариационного начала

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0. \tag{50.10}$$

Это послужит нам указанием при построении теории тяготения.

§ 51. Квадрат интервала в ньютоновом приближении

Явление всемирного тяготения требует расширения рамок той теории пространства и времени, которая составляла предмет предыдущих глав. Необходимость такого расширения видна из следующих соображений.

Из уравнения распространения фронта волны, написанного в виде

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{51.01}$$

вытекает прямолинейность распространения света. Но свет обладает энергией, а по закону пропорциональности между массой и энергией всякая энергия неразрывно связана с некоторой массой; следовательно, свет обладает массой. С другой стороны, по закону всемирного тяготения всякая масса, находящаяся в поле тяготения, должна испытывать действие этого поля; ее движение не будет в общем случае прямолинейным. Поэтому следует ожидать, что и луч света в поле тяготения не будет прямолинейным *). Отсюда вытекает, что в поле тяготения уравнение распространения фронта волны должно несколько отличаться от написанного выше. Но, как мы видели в предыдущих главах, уравнение распространения фронта волны является основной характеристикой свойств пространства и времени. Отсюда следует вывод, что наличие поля тяготения должно влиять на свойства пространства и времени. Такой вывод и делается в теории тяготения к построению которой мы приступаем.

Как было показано в главе I, уравнению распространения фронта волны в форме (51.01) соответствует, при некоторых добавочных предположениях, следующее выражение для квадрата интервала:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{51.02}$$

Влияние поля тяготения на свойства пространства и времени должно сказываться в том, что коэффициенты в уравнении распространения фронта волны и в выражении для квадрата интервала будут отличаться от постоянных значений, даваемых формулами (51.01) и (51.02). Нам надлежит установить приближенный вид выражения для квадрата интервала в поле тяготения с ньютоновым потенциалом U. Мы будем опираться

*) Теория отклонения луча света в поле тяготения дана ниже, в § 59.

при этом на обобщенный закон Галилея. Тот фундаментальный факт, что закон движения свободного тела в поле тяготения имеет универсальный характер и не зависит от свойств тела, позволяет найти связь между этим законом движения и метрикой пространства-времени.

В § 38 мы изучали уравнения геодезической линии в пространстве-времени с данной метрикой. Мы можем попытаться подобрать метрику так, чтобы уравнения геодезической линии приближенно совпали с ньютоновыми уравнениями движения свободного тела в заданном поле тяготения. Успех этой попытки позволит ввести гипотезу о том, что в пространстве-времени с данной метрикой свободное тело (материальная точка) движется по геодезической линии, и тем самым установить искомую связь между законом движения и метрикой.

Уравнения геодезической линии могут быть выведены, как мы знаем, из вариационного начала

$$\delta \int ds = 0. \tag{51.03}$$

Если квадрат интервала имеет вид (51.02), то будет

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2}\, dt, \tag{51.04}$$

и при малых скоростях

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c}\right) dt. \tag{51.05}$$

Подстановка в вариационное начало (51.03) выражений (51.04) и (51.05) для ds дает движение с постоянной скоростью, т. е. свободное движение при отсутствии поля тяготения. Предположим теперь, что при малых скоростях и слабых полях тяготения ($U \ll c^2$) выражение для интервала имеет вид

$$ds = \sqrt{c^2 - 2U - v^2}\, dt \tag{51.06}$$

или

$$ds = \left[c - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2} v^2 + U\right)\right] dt \tag{51.07}$$

вместо предыдущих двух формул (51.04) и (51.05). Так как аддитивная постоянная и постоянный множитель в лагранжевой функции не играют роли, то вариационное начало (51.03) со значением (51.07) для ds дает то же, что и формулированное в конце § 50 вариационное начало

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0, \tag{51.08}$$

а именно уравнения свободного движения тела в поле тяготения.

Правда, по той же причине несущественности аддитивной постоянной и постоянного множителя в лагранжевой функции уравнение (51.08) получалось бы из (51.03) и (51.06) при любом достаточно большом значении постоянной c. Но мы должны потребовать, чтобы при отсутствии поля тяготения ($U=0$) выражение (51.06) для интервала переходило, при любых v^2, в формулу (51.04), соответствующую галилеевой метрике. Отсюда уже следует, что постоянная c в формуле (51.06) должна равняться скорости света.

Приведенные рассуждения дают нам право предполагать, что при условиях

$$\left.\begin{array}{c} U \ll c^2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2 \ll c^2 \end{array}\right\} \qquad (51.09)$$

квадрат интервала мало отличается от выражения

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2). \qquad (51.10)$$

Относительная погрешность в коэффициенте при dt^2 здесь во всяком случае более высокого порядка, чем учтенный член $\frac{2U}{c^2}$. Что касается коэффициента при чисто пространственной части интервала, то он может отличаться от единицы на величины порядка $\frac{2U}{c^2}$. Действительно, теория тяготения, которая будет развита в следующих параграфах, дает в качестве более точного выражения

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \qquad (51.11)$$

При условиях (51.09) отличие выражения (51.10) от (51.11) остается несущественным, как и должно быть.

Найденное значение коэффициента при dt^2 допускает, в принципе, опытную проверку.

Пусть в некоторой точке (x, y, z), где потенциал тяготения есть U_1, имеется излучатель с собственным периодом T_0. Испускаемая им волна будет иметь зависимость от времени вида

$$\exp\left(i2\pi\frac{t}{T_1}\right), \qquad (51.12)$$

где T_1 уже не равно T_0, а связано с T_0 так же, как dt связано с $d\tau$, где $d\tau$ — дифференциал собственного времени излучателя. Предполагая для простоты излучатель (в данной системе отсчета) неподвижным, будем иметь приближенно

$$d\tau=\frac{1}{c}\,ds=\left(1-\frac{U_1}{c^2}\right)dt \qquad (51.13)$$

и, следовательно,

$$T_0=\left(1-\frac{U_1}{c^2}\right)T_1. \qquad (51.14)$$

В данной задаче можно пренебречь зависимостью потенциала тяготения U от времени и считать поле тяготения статическим. Тогда распространяющаяся от излучателя волна сохранит свою зависимость от времени (51.12) во всем пространстве.

Предположим теперь, что в некоторой другой точке (x_2, y_2, z_2), где потенциал тяготения отличен от U_1 и равен U_2, имеется второй точно такой же излучатель (например, атом того же элемента). Испускаемая им волна будет во всем пространстве иметь зависимость от времени вида

$$\exp\left(i2\pi\frac{t}{T_2}\right), \tag{51.15}$$

где

$$T_0=\left(1-\frac{U_2}{c}\right)T_2. \tag{51.16}$$

Сравнивая периоды волн, идущих из мест с разными значениями потенциала тяготения, но испускаемых одинаковыми излучателями, мы получаем разность

$$T_2-T_1=\frac{U_2-U_1}{c^2}\cdot T_0. \tag{51.17}$$

Если U_2 есть потенциал на Солнце, а U_1 — на Земле, то будет $U_2>U_1$, причем численное значение множителя при T_0 в (51.17) будет приблизительно равно

$$\frac{U_2-U_1}{c^2}=2\cdot 10^{-6}. \tag{51.18}$$

Таким образом, длина волны спектральных линий, испускаемых на Солнце, должна смещаться (по сравнению с линиями, испускаемыми на Земле) на две миллионные доли к красному концу спектра.

Необходимо, однако, заметить, что испускание линий на Солнце происходит при других физических условиях, чем на Земле, и что поправка на разность потенциалов тяготения в значительной мере затушевывается другими поправками.

Но имеются сверхплотные звезды (например спутник Сириуса), плотность которых в десятки тысяч раз превышает плотность воды. На их поверхности значение потенциала тяготения значительно больше, чем на поверхности Солнца (для спутника Сириуса — в 20 раз). Для таких звезд поправка на разность потенциалов тяготения становится весьма заметной и может быть обнаружена на опыте.

Таким образом, можно считать, что найденное значение коэффициента при dt^2 в выражении для квадрата интервала согласуется с экспериментальными данными.

§ 52. Уравнения тяготения Эйнштейна

Основная идея теории тяготения Эйнштейна, в ее ограниченной (не космологической) постановке, состоит в следующем.

Геометрические свойства реального физического пространства и времени соответствуют не геометрии Евклида, а геометрии Римана.