распространяющаяся от излучателя волна сохранит свою зависимость от времени (51.12) во всем пространстве.

Предположим теперь, что в некоторой другой точке (x_2, y_2, z_2), где потенциал тяготения отличен от U_1 и равен U_2, имеется второй точно такой же излучатель (например, атом того же элемента). Испускаемая им волна будет во всем пространстве иметь зависимость от времени вида

$$\exp\left(i2\pi\frac{t}{T_2}\right), \tag{51.15}$$

где

$$T_0=\left(1-\frac{U_2}{c}\right)T_2. \tag{51.16}$$

Сравнивая периоды волн, идущих из мест с разными значениями потенциала тяготения, но испускаемых одинаковыми излучателями, мы получаем разность

$$T_2-T_1=\frac{U_2-U_1}{c^2}\cdot T_0. \tag{51.17}$$

Если U_2 есть потенциал на Солнце, а U_1 — на Земле, то будет $U_2>U_1$, причем численное значение множителя при T_0 в (51.17) будет приблизительно равно

$$\frac{U_2-U_1}{c^2}=2\cdot 10^{-6}. \tag{51.18}$$

Таким образом, длина волны спектральных линий, испускаемых на Солнце, должна смещаться (по сравнению с линиями, испускаемыми на Земле) на две миллионные доли к красному концу спектра.

Необходимо, однако, заметить, что испускание линий на Солнце происходит при других физических условиях, чем на Земле, и что поправка на разность потенциалов тяготения в значительной мере затушевывается другими поправками.

Но имеются сверхплотные звезды (например спутник Сириуса), плотность которых в десятки тысяч раз превышает плотность воды. На их поверхности значение потенциала тяготения значительно больше, чем на поверхности Солнца (для спутника Сириуса — в 20 раз). Для таких звезд поправка на разность потенциалов тяготения становится весьма заметной и может быть обнаружена на опыте.

Таким образом, можно считать, что найденное значение коэффициента при dt^2 в выражении для квадрата интервала согласуется с экспериментальными данными.

§ 52. Уравнения тяготения Эйнштейна

Основная идея теории тяготения Эйнштейна, в ее ограниченной (не космологической) постановке, состоит в следующем.

Геометрические свойства реального физического пространства и времени соответствуют не геометрии Евклида, а геометрии Римана.

с основными положениями которой мы ознакомились в главе III. Отклонения геометрических свойств от евклидовых (точнее, от псевдоевклидовых) проявляются в природе как поле тяготения. Свойства эти неразрывно связаны с распределением тяготеющих масс и их движением. Связь эта — взаимная. С одной стороны, отклонения геометрических свойств от евклидовых обусловлены наличием тяготеющих масс, а с другой стороны, движение масс в поле тяготения определяется отклонениями этих свойств от евклидовых. Короче можно сказать, что массы определяют геометрические свойства пространства и времени, а эти свойства определяют движение масс.

Постараемся сформулировать эти идеи математически.

В предыдущем параграфе мы видели, что в системе координат, практически совпадающей с инерциальной системой ньютоновой механики, ньютонов потенциал тяготения U входит в коэффициент при dt^2 в выражении для квадрата интервала, т. е. в коэффициент g_{00} общего выражения

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu. \tag{52.01}$$

С другой стороны, потенциал тяготения U удовлетворяет, в ньютоновом приближении, уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \tag{52.02}$$

Искомое обобщение ньютоновой теории тяготения должно быть ковариантным относительно произвольных преобразований координат. Поэтому мы не можем рассматривать в качестве обобщения ньютонова потенциала отдельное слагаемое в коэффициенте g_{00}, или самый этот коэффициент, а должны ввести в рассмотрение всю совокупность коэффициентов $g_{\mu\nu}$ и считать, что обобщением ньютонова потенциала тяготения является фундаментальный метрический тензор. Этот тензор должен удовлетворять общековариантной системе уравнений, одно из которых должно, в ньютоновом приближении, переходить в уравнение Пуассона для ньютонова потенциала U. Общее число уравнений должно, вообще говоря, равняться числу неизвестных функций, т. е. числу компонент тензора $g_{\mu\nu}$, которое равно десяти.

В левой части уравнения Пуассона стоит дифференциальный оператор второго порядка от U (оператор Лапласа). Наиболее простым общековариантным обобщением левой части уравнения Пуассона будет поэтому тензор, содержащий линейным образом вторые производные от фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Таким тензором является тензор кривизны (второго или четвертого ранга). Тензор кривизны четвертого ранга $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ отпадает, так как его составляющие не содержат таких выражений, которые бы представляли обобщение оператора Лапласа. Кроме того, число составляющих $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ слишком велико (оно равно 20, т. е. вдвое больше числа неизвестных функций) *). Остается, следовательно, тензор кривизны второго ранга, который как раз имеет должное число составляющих.

В правой части уравнения Пуассона стоит плотность масс ρ. Обобщением плотности масс, имеющим надлежащий тензорный характер, является тензор массы $T^{\mu\nu}$, инвариант которого равен инвариантной плотности массы.

Мы приходим к выводу, что обобщением уравнения Пуассона должно являться соотношение между тензором кривизны второго ранга $R^{\mu\nu}$ и тензором массы $T^{\mu\nu}$.

В предыдущих главах мы видели, что при отсутствии тяготения расходимость тензора $T^{\mu\nu}$ равна нулю:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{52.03}$$

Мы сохраним это уравнение и для общего случая, отложив обсуждение связанных с ним вопросов (об энергии поля тяготения, об интегральной форме законов сохранения и др.) до главы VII.

С другой стороны, в конце главы III мы установили, что тензор

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \tag{52.04}$$

называемый тензором Эйнштейна или консервативным тензором, обладает тем замечательным свойством, что его расходимость тождественно равна нулю

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0. \tag{52.05}$$

Поэтому, если мы положим

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{52.06}$$

где $\varkappa$ — постоянная, то уравнение (52.03) для тензора массы будет следствием соотношения (52.06).

Уравнению (52.05) удовлетворяет, как мы знаем, также фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$; поэтому мы могли бы, не нарушая (52.03), добавить к левой части (52.06) член вида $\lambda g^{\mu\nu}$, где λ — новая постоянная. Однако такая добавка противоречила бы требованию, чтобы при отсутствии масс поле тяготения равнялось нулю. В самом деле, согласно нашим основным положениям, изложенным в начале этого параграфа, отсутствие поля тяготения означает отсутствие отклонений геометрии пространства-времени от евклидовой, а значит и равенство

---

*) Правда, уравнения для тензора $R_{\mu\nu,\sigma\beta}$, даже в избыточном числе, могут оказаться совместными, как это имеет место в случае пространства постоянной кривизны [уравнения (49.12)]. Но в этом случае уравнения позволяют определить метрику чисто локально (т. е. без привлечения предельных условий) и имеют поэтому другой характер, чем уравнение Пуассона, для которого предельные условия существенны.

нулю тензора кривизны. Следовательно, при $T^{\mu\nu}=0$ должно быть и $R^{\mu\nu}=0$ (а также $R=0$), что возможно только, если левая часть уравнений, связывающих $G^{\mu\nu}$ с $T^{\mu\nu}$, не содержит члена $\lambda g^{\mu\nu}$ (т. е. только, если $\lambda=0$).

Таким образом, надлежащим обобщением уравнения Пуассона для потенциала тяготения являются именно уравнения (52.06).

Можно доказать, что при поставленных условиях [соответствие с уравнением Пуассона, общая ковариантность, линейность во вторых производных от $g_{\mu\nu}$, тождественное выполнение соотношения (52.05) для левой части, евклидовость при отсутствии масс] полученные уравнения являются единственными.

Уравнения (52.06) называются уравнениями тяготения Эйнштейна и играют фундаментальную роль в теории тяготения. Дальнейшие параграфы будут посвящены их исследованию.

§ 53. Характеристики уравнений Эйнштейна. Скорость распространения тяготения

Мы начнем исследование уравнений тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa T^{\mu\nu} \tag{53.01}$$

с составления уравнения первого порядка, дающего характеристики исследуемой системы уравнений. С физической точки зрения уравнение характеристики представляет закон распространения фронта гравитационной волны.

Умножая уравнения (53.01) на $g_{\mu\nu}$ и суммируя, мы получаем соотношение

$$R=\varkappa T \tag{53.02}$$

между инвариантами тензора кривизны и тензора массы. Это соотношение позволяет написать уравнения тяготения в виде

$$R^{\mu\nu}=-\varkappa\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right). \tag{53.03}$$

Для контравариантного тензора кривизны $R^{\mu\nu}$ в Добавлении Б выведено выражение

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53.04}$$

Здесь $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ есть величина, получаемая из $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ поднятием значков

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}=g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}. \tag{53.05}$$

Таким образом, последний член в (53.04) не содержит вторых производных, а представляет однородную квадратичную функцию от величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, а значит и от первых производных фундаментального тензора.