нулю тензора кривизны. Следовательно, при $T^{\mu\nu}=0$ должно быть и $R^{\mu\nu}=0$ (а также $R=0$), что возможно только, если левая часть уравнений, связывающих $G^{\mu\nu}$ с $T^{\mu\nu}$, не содержит члена $\lambda g^{\mu\nu}$ (т. е. только, если $\lambda=0$).

Таким образом, надлежащим обобщением уравнения Пуассона для потенциала тяготения являются именно уравнения (52.06).

Можно доказать, что при поставленных условиях [соответствие с уравнением Пуассона, общая ковариантность, линейность во вторых производных от $g_{\mu\nu}$, тождественное выполнение соотношения (52.05) для левой части, евклидовость при отсутствии масс] полученные уравнения являются единственными.

Уравнения (52.06) называются уравнениями тяготения Эйнштейна и играют фундаментальную роль в теории тяготения. Дальнейшие параграфы будут посвящены их исследованию.

§ 53. Характеристики уравнений Эйнштейна. Скорость распространения тяготения

Мы начнем исследование уравнений тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa T^{\mu\nu} \tag{53.01}$$

с составления уравнения первого порядка, дающего характеристики исследуемой системы уравнений. С физической точки зрения уравнение характеристики представляет закон распространения фронта гравитационной волны.

Умножая уравнения (53.01) на $g_{\mu\nu}$ и суммируя, мы получаем соотношение

$$R=\varkappa T \tag{53.02}$$

между инвариантами тензора кривизны и тензора массы. Это соотношение позволяет написать уравнения тяготения в виде

$$R^{\mu\nu}=-\varkappa\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right). \tag{53.03}$$

Для контравариантного тензора кривизны $R^{\mu\nu}$ в Добавлении Б выведено выражение

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53.04}$$

Здесь $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ есть величина, получаемая из $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ поднятием значков

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}=g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}. \tag{53.05}$$

Таким образом, последний член в (53.04) не содержит вторых производных, а представляет однородную квадратичную функцию от величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, а значит и от первых производных фундаментального тензора.

Вторые производные входят, кроме первого члена, также и в величины $\Gamma^{\mu\nu}$. Но эти последние содержат вторые производные только через посредство первых производных от величин

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{53.06}$$

введенных нами в § 41. Напомним, что оператор Даламбера от некоторой функции ψ может быть написан как в виде

$$\Box\psi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \Gamma^{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}, \tag{53.07}$$

так и в виде

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right) \tag{53.08}$$

откуда

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right), \tag{53.09}$$

а также

$$\Gamma^{\alpha} = -\Box x_\alpha. \tag{53.10}$$

Величины $\Gamma^{\mu\nu}$ получаются из Γ^{ν} по правилу, формально совпадающему с правилом составления полусуммы контравариантных производных, а именно

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}\right), \tag{53.11}$$

или подробнее

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\nu}}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\Gamma^{\alpha}\right). \tag{53.12}$$

Разумеется, поскольку Γ^{ν} не есть вектор, величины $\Gamma^{\mu\nu}$ не являются тензором. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнений Эйнштейна.

Уравнения Эйнштейна являются общековариантными и, следовательно, допускают преобразования координат, содержащие четыре произвольные функции. Пусть уравнения решены в каких-нибудь произвольных координатах. Мы можем перейти тогда к другим координатам, взяв в качестве независимых переменных четыре решения уравнения $\Box\psi = 0$. Эти решения можно выбрать так, чтобы удовлетворялись неравенства для $g^{\mu\nu}$, формулированные в § 35, а также некоторые дополнительные условия. Но если каждая из координат x_0, x_1, x_2, x_3 удовлетворяет уравнению $\Box x_\alpha = 0$, то в данной координатной системе будет

$$\Gamma^{\alpha} = 0, \tag{53.13}$$

а следовательно, и

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{53.14}$$

Такую координатную систему мы будем называть гармонической.

Вопрос об однозначности выбора гармонической координатной системы (и о дополнительных условиях, которые бы гарантировали однозначность) нас пока не интересует и будет рассмотрен в другом месте (§ 93). Нам важно здесь констатировать, что уравнения (53.13) совместны с уравнениями Эйнштейна и что они не налагают по существу никаких ограничений на их решения, а только суживают класс допустимых координатных систем *).

При условии (53.13) выражение для $R^{\mu\nu}$ упростится и примет вид

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53.15}$$

Это выражение для $R^{\mu\nu}$ содержит вторые производные только от одной величины, а именно от одноименной компоненты фундаментального тензора $g^{\mu\nu}$, причем эти вторые производные группируются в виде оператора Даламбера.

Вид уравнения характеристик данной системы уравнений зависит только от членов с высшими производными, входящих в эту систему. В случае системы уравнений (53.01) и (53.13) членами с высшими производными являются те, которые группируются в виде оператора Даламбера.

Поэтому для системы уравнений тяготения характеристики будут те же, как для уравнения Даламбера

$$\Box \psi = 0. \tag{53.16}$$

Но эти последние легко найти. Как показано в Добавлении В, они имеют вид

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0, \tag{53.17}$$

где

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{53.18}$$

есть уравнение фронта волны т. е. уравнение движущейся поверхности разрыва значений поля.

Уравнение (53.17), дающее закон распространения фронта гравитационной волны, совпадает с положенным в основу всей теории пространства и времени уравнением, дающим закон распространения фронта световой волны в свободном пространстве **). Коротко можно сказать, что тяготение распространяется со скоростью света.

---

*) Условия $\Gamma^\alpha = 0$ были впервые введены де-Дондером [16] и Ланчосом [17].

**) При выводе этого закона из уравнений Максвелла (§ 3) мы предполагали, что пространство-время является евклидовым. Но, согласно замечанию, сделанному в конце Добавления В, тот же результат получается и без этого предположения, если исходить из общековариантных уравнений Максвелла (§ 46)

Тот факт, что по теории Эйнштейна тяготение распространяется со скоростью света, имеет большое принципиальное значение. Он показывает, что принятая в этой теории форма уравнений тяготения находится в согласии с общим положением теории относительности, согласно которому существует предельная скорость распространения всякого рода действий, равная скорости света в свободном пространстве. Существование конечной скорости распространения тяготения устраняет те противоречия, которые были присущи ньютоновой теории тяготения, рассматривавшей мгновенные дальнодействия.

§ 54. Сравнение с постановкой задачи в теории Ньютона. Предельные условия

В теории тяготения Ньютона потенциал тяготения удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho \tag{54.01}$$

и стремится к нулю на бесконечности так, что

$$\lim_{r\to\infty} rU = \gamma M, \tag{54.02}$$

где M — полная масса всех тел рассматриваемой системы, равная

$$M = \int \rho \, dx \, dy \, dz. \tag{54.03}$$

Теория Эйнштейна, основанная на уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{54.04}$$

должна в первом приближении давать то же, что теория Ньютона. Теория тяготения Ньютона применима к таким распределениям масс, для которых полная масса, выражаемая интегралом (54.03), распространенным по всему бесконечному объему, остается конечной. Этому условию удовлетворяет, в частности, распределение масс, имеющее островной характер. Под этим мы разумеем тот случай, когда все массы рассматриваемой системы сосредоточены внутри конечного объема, отделенного весьма большим расстоянием от остальных масс, не входящих в систему. При достаточно большом удалении остальных масс влиянием их на данную систему масс можно пренебречь и рассматривать ее как изолированную

При формулировке теории Эйнштейна мы также будем исходить из предположения об островном характере распределения масс. Это предположение дает возможность поставить (как и в теории Ньютона) определенные предельные условия на бесконечности, что делает задачу математически определенной.

Теоретически мыслимы и другие предположения, например, предположение о равномерном (в среднем) распределении масс во всем