Тот факт, что по теории Эйнштейна тяготение распространяется со скоростью света, имеет большое принципиальное значение. Он показывает, что принятая в этой теории форма уравнений тяготения находится в согласии с общим положением теории относительности, согласно которому существует предельная скорость распространения всякого рода действий, равная скорости света в свободном пространстве. Существование конечной скорости распространения тяготения устраняет те противоречия, которые были присущи ньютоновой теории тяготения, рассматривавшей мгновенные дальнодействия.

§ 54. Сравнение с постановкой задачи в теории Ньютона. Предельные условия

В теории тяготения Ньютона потенциал тяготения удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho \tag{54.01}$$

и стремится к нулю на бесконечности так, что

$$\lim_{r\to\infty} rU = \gamma M, \tag{54.02}$$

где M — полная масса всех тел рассматриваемой системы, равная

$$M = \int \rho\, dx\, dy\, dz. \tag{54.03}$$

Теория Эйнштейна, основанная на уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{54.04}$$

должна в первом приближении давать то же, что теория Ньютона. Теория тяготения Ньютона применима к таким распределениям масс, для которых полная масса, выражаемая интегралом (54.03), распространенным по всему бесконечному объему, остается конечной. Этому условию удовлетворяет, в частности, распределение масс, имеющее островной характер. Под этим мы разумеем тот случай, когда все массы рассматриваемой системы сосредоточены внутри конечного объема, отделенного весьма большим расстоянием от остальных масс, не входящих в систему. При достаточно большом удалении остальных масс влиянием их на данную систему масс можно пренебречь и рассматривать ее как изолированную

При формулировке теории Эйнштейна мы также будем исходить из предположения об островном характере распределения масс. Это предположение дает возможность поставить (как и в теории Ньютона) определенные предельные условия на бесконечности, что делает задачу математически определенной.

Теоретически мыслимы и другие предположения, например, предположение о равномерном (в среднем) распределении масс во всем пространстве. Такая точка зрения предполагает рассмотрение столь огромных расстояний, что по сравнению с ними даже расстояния между галактиками должны считаться весьма малыми. Мы мало знаем о распределении масс в таких огромных пространствах. Поэтому теория таких огромных пространств будет по необходимости менее достоверной и менее доступной опытной проверке, чем теория астрономических явлений меньшего масштаба.

Основная часть этой книги будет посвящена случаю островного распределения масс. Предположение о равномерном распределении масс будет рассматриваться лишь в §§ 94 и 95, где будет дана теория пространства Фридмана — Лобачевского, к которому приводит это предположение.

Итак, мы будем считать, что в среднем пространство-время евклидово (точнее, псевдо-евклидово или галилеево) и что отклонения геометрии пространства-времени от евклидовой обусловлены наличием поля тяготения. Там, где поле тяготения отсутствует, геометрия должна быть евклидовой. При островном распределении масс поле тяготения на бесконечности стремится к нулю. Поэтому мы должны предположить, что на достаточно большом удалении от масс геометрия пространства-времени становится евклидовой. Но там, где геометрия евклидова, существуют галилеевы координаты x, y, z, t, в которых квадрат интервала имеет вид:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{54.05}$$

Поскольку опыт показывает, что и во всем пространстве геометрия мало отличается от евклидовой, следует ожидать, что существуют такие переменные, в которых выражение для квадрата интервала мало отличается от (54.05) во всем пространстве. Более точное математическое определение этих „квази-галилеевых“ координат будет дано в дальнейшем.

Заметим, что теория Ньютона проще всего формулируется именно в галилеевых координатах (инерциальная система отсчета). Поэтому сравнение с ней теории Эйнштейна, которая является ее обобщением, следует производить в таких координатах, которые по своим свойствам ближе всего к галилеевым.

Теория Ньютона является нерелятивистской. Но для перехода от релятивистской теории к нерелятивистской необходимо выделить в качестве большого параметра скорость света c. Поэтому мы не будем вводить величины c в выражение для временнóй координаты и положим, вместо (35.03), просто

$$x_0 = t; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z. \tag{54.06}$$

Таким образом, переменная x_0 будет иметь у нас теперь значение времени t, а не величины ct, как раньше.

Выражение (54.05) для квадрата интервала напишется теперь:

$$ds^2 = c^2\,dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \tag{54.07}$$

Это выражение должно иметь место на достаточно большом расстоянии от масс, где геометрия является евклидовой.

Из сравнения с общим выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu \tag{54.08}$$

мы получим следующие предельные значения $g_{\mu\nu}$ на бесконечности:

$$\left.\begin{aligned} (g_{00})_\infty &= c^2; \qquad (g_{0i})_\infty = 0, \\ (g_{ik})_\infty &= -\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{54.09}$$

Соответствующие предельные значения для контравариантных компонент фундаментального тензора будут равны

$$(g^{00})_\infty = \frac{1}{c^2}; \quad (g^{0i})_\infty = 0; \quad (g^{ik})_\infty = -\delta_{ik}. \tag{54.10}$$

Эти формулы можно рассматривать как предельные условия для фундаментального тензора.

Написанных предельных условий, однако, недостаточно, и к ним нужно присоединить другие, характеризующие асимптотическое поведение разностей $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ на большом удалении от масс.

В предыдущем параграфе мы видели, что уравнения Эйнштейна представляют (по крайней мере, при условии $\Gamma^\nu = 0$) уравнения волнового типа, в которых главные члены имеют вид оператора Даламбера. Вне масс тензор $T^{\mu\nu}$ равен нулю, и уравнения приводятся к виду

$$R^{\mu\nu} = 0, \tag{54.11}$$

где, при условии $\Gamma^\nu = 0$, тензор $R^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{54.12}$$

Предположим, что на больших расстояниях разности $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty$ и их первые и вторые производные стремятся к нулю, как $1/r$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. (Это предположение будет оправдано в дальнейшем). Тогда на больших расстояниях второй член в (54.12), представляющий однородную квадратичную функцию от первых производных, будет стремиться к нулю как $1/r^2$. Что касается оператора Даламбера, то с тем же приближением коэффициенты в нем можно заменить их предельными значениями. После этих упрощений мы получим

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3^2}\right). \tag{54.13}$$

Более полное исследование асимптотического поведения величин $g^{\mu\nu}$ будет дано в § 87. Исследование это показывает, что на асимптотический вид $g^{\mu\nu}$ влияют также члены порядка $\frac{1}{r^2}$, отброшенные в (54.13), но что качественно поведение разности $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty$ будет то же, как поведение функции ψ, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0, \tag{54.14}$$

где Δ есть обыкновенный (евклидов) оператор Лапласа.

Нас интересуют решения волнового уравнения (54.14), которые соответствуют расходящейся волне, убывающей на бесконечности. Они имеют асимптотический вид

$$\psi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{n}\right), \tag{54.15}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор с составляющими

$$n_x = \frac{x}{r}; \qquad n_y = \frac{y}{r}; \qquad n_z = \frac{z}{r}, \tag{54.16}$$

а f — произвольная функция. Функция f и ее производные по всем аргументам предполагаются конечными. Аргумент $\mathbf{n}$ дает зависимость функции f от направления, в котором точка удаляется на бесконечность.

Другие возможные решения волнового уравнения должны быть отброшены по физическим соображениям. В самом деле, в нашей постановке задачи система рассматривается как изолированная. Но это означает, что извне никакие волны на нее не падают. Всякая волна имеет своим источником одно из тел системы, а поскольку в системе островного типа все тела сосредоточены в некоторой конечной области, всякая волна исходит из этой области и на больших расстояниях от нее имеет асимптотический вид (54.15).

Условие, чтобы решение волнового уравнения имело на бесконечности указанный вид, можно записать в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\left(\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial r} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial t}\right) = 0. \\ (\text{при } r \to \infty \text{ и всех } t) \end{array}\right\} \tag{54.17}$$

Это условие можно назвать условием излучения. Оно гарантирует единственность решения волнового уравнения, если только присоединить к нему требование, чтобы функция ψ и ее первые производные по x, y, z, t были всюду ограничены и убывали на бесконечности, как $\frac{1}{r}$ (см. § 92).

Напомним, что вышеприведенные соображения относятся, строго говоря, к обычному волновому уравнению (54.14), а не к уравнениям Эйнштейна. Поэтому асимптотический вид разности

$$g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_{\infty} = \psi \tag{54.18}$$

будет несколько отличаться от (54.15). Однако условие излучения, написанное в дифференциальной форме (54.17), будет справедливо и для величины (54.18).

Резюмируя, можно сказать, что, в нашей постановке задачи, фундаментальный тензор должен удовлетворять требованию евклидовости на бесконечности и условию излучения.

§ 55. Решение уравнений тяготения Эйнштейна в первом приближении и определение постоянной

Для сравнения теории тяготения Эйнштейна с теорией Ньютона мы должны прежде всего определить постоянную $\varkappa$, входящую в уравнения тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}. \tag{55.01}$$

Значение этой постоянной можно найти из сопоставления выражения для квадрата интервала в ньютоновом приближении (§ 51) с выражением, получаемым путем приближенного решения уравнений Эйнштейна.

Для тензора массы в правой части (55.01) мы можем взять приближенные выражения, соответствующие евклидовой метрике и рассмотренные в § 32 (где они были выписаны для случая упругого тела). Переписывая эти выражения, мы должны помнить, что величина x_0 означает у нас теперь просто время t, а не ct, как раньше. Поэтому прежнее T^{00} будет равно, в новых обозначениях, $c^2 T^{00}$, а прежнее T^{0i} будет равно новому cT^{0i}, тогда как T^{ik} не изменится. Таким образом, если $x_0 = t$, то формулы (32.34) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i + \frac{1}{c^2}\left\{ v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k \right\}, \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.02}$$