единить к нему требование, чтобы функция ψ и ее первые производные по x, y, z, t были всюду ограничены и убывали на бесконечности, как $\frac{1}{r}$ (см. § 92).

Напомним, что вышеприведенные соображения относятся, строго говоря, к обычному волновому уравнению (54.14), а не к уравнениям Эйнштейна. Поэтому асимптотический вид разности

$$g^{\mu\nu}-(g^{\mu\nu})_{\infty}=\psi \tag{54.18}$$

будет несколько отличаться от (54.15). Однако условие излучения, написанное в дифференциальной форме (54.17), будет справедливо и для величины (54.18).

Резюмируя, можно сказать, что, в нашей постановке задачи, фундаментальный тензор должен удовлетворять требованию евклидовости на бесконечности и условию излучения.

§ 55. Решение уравнений тяготения Эйнштейна в первом приближении и определение постоянной

Для сравнения теории тяготения Эйнштейна с теорией Ньютона мы должны прежде всего определить постоянную $\varkappa$, входящую в уравнения тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa T^{\mu\nu}. \tag{55.01}$$

Значение этой постоянной можно найти из сопоставления выражения для квадрата интервала в ньютоновом приближении (§ 51) с выражением, получаемым путем приближенного решения уравнений Эйнштейна.

Для тензора массы в правой части (55.01) мы можем взять приближенные выражения, соответствующие евклидовой метрике и рассмотренные в § 32 (где они были выписаны для случая упругого тела). Переписывая эти выражения, мы должны помнить, что величина x_0 означает у нас теперь просто время t, а не ct, как раньше. Поэтому прежнее T^{00} будет равно, в новых обозначениях, c^2T^{00}, а прежнее T^{0i} будет равно новому cT^{0i}, тогда как T^{ik} не изменится. Таким образом, если $x_0=t$, то формулы (32.34) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
c^2T^{00}&=\rho+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\Pi\right),\\
c^2T^{0i}&=\rho v_i+\frac{1}{c^2}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\Pi\right)-\sum_{k=1}^{3}p_{ik}v_k\right\},\\
c^2T^{ik}&=\rho v_i v_k-p_{ik}.
\end{aligned}\right\} \tag{55.02}$$

В нашем приближении мы должны здесь отбросить члены, соответствующие плотности и потоку энергии (скаляру и вектору Умова), и писать просто

$$c^2 T^{00} = \rho; \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \tag{55.03}$$

С той же точностью, с какой справедливы выражения (55.03), мы можем заменить инвариант тензора массы значением

$$T = \rho. \tag{55.04}$$

Формулы (55.03) и (55.04) позволяют вычислить приближенные значения тензора, входящего в правую часть уравнений Эйнштейна, написанных, согласно (53.03), в виде

$$R^{\mu\nu} = -\varkappa\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right). \tag{55.05}$$

Используя галилеевы значения $g^{\mu\nu}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2}\rho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= \frac{1}{c^2}\rho v_i, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= \frac{1}{2}\rho\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.06}$$

С другой стороны, в гармонической координатной системе мы приближенно имеем, согласно (54.13):

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2}, \tag{55.07}$$

где Δ — обычный евклидов оператор Лапласа. Поскольку нас интересует квази-статическое решение, мы можем отбросить здесь член с второй производной по времени. Подставляя (55.07) и (55.06) в (55.05), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Delta g^{00} &= -\frac{\varkappa}{c^2}\rho, \\ \Delta g^{0i} &= -\frac{2\varkappa}{c^2}\rho v_i, \\ \Delta g^{ik} &= -\varkappa\rho\delta_{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{55.08}$$

Припомним теперь выражение для квадрата интервала в ньютоновом приближении. Согласно (51.10), в этом выражечии

$$g_{00} = c^2 - 2U, \tag{55.09}$$

где U есть ньютонов потенциал; остальные компоненты фундаментального тензора заменяются в этом приближении их галилеевыми значениями. Применяя формулу

$$g_{00} g^{00} + \sum_{i=1}^{3} g_{0i} g^{i0} = 1 \tag{55.10}$$

и используя то обстоятельство, что произведения $g_{0i} g^{i0}$ весьма малы по сравнению с единицей *), мы можем считать, что

$$g_{00}g^{00} = 1 \tag{55.11}$$

и, следовательно,

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}. \tag{55.12}$$

Но ньютонов потенциал U удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \tag{55.13}$$

Отсюда

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\rho. \tag{55.14}$$

Сравнивая это уравнение с первым уравнением (55.08), мы получим совпадение, если эйнштейнова постоянная тяготения $\varkappa$ будет связана с ньютоновой постоянной γ соотношением

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \tag{55.15}$$

Ньютонов потенциал U есть то решение уравнения (55.13), которое удовлетворяет надлежащим предельным условиям на бесконечности. Это решение, как известно, может быть представлено в виде объемного интеграла

$$U = \gamma \int \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz'. \tag{55.16}$$

Введем, наряду с ньютоновым потенциалом, функции

$$U_i = \gamma \int \frac{\rho v_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz', \tag{55.17}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{55.18}$$

и условиям на бесконечности. Эти функции могут быть названы, по аналогии с соответствующими электродинамическими величинами, вектор-потенциалом тяготения. Тогда решения уравнений (55.08), после замены в них постоянной $\varkappa$ ее значением (55.15), напишутся:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.19}$$

*) Оценка этим членам будет дана ниже

Заметим, что U имеет размерность квадрата скорости, а U_i—размерность третьей степени скорости. При оценке порядка величины можно считать, что U будет порядка q^2, а U_i — порядка q^3, где q есть некоторая скорость, малая по сравнению со скоростью света.

Из контравариантных компонент фундаментального тензора мы можем уже чисто алгебраическим путем найти ковариантные компоненты, а также определитель g и другие величины.

Для упрощения алгебраических выкладок введем систему величин

$$a_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}; \quad a^{ik} = -g^{ik}, \tag{55.20}$$

где $i, k = 1, 2, 3$. Нетрудно проверить, что будет

$$\sum_{m=1}^{3} a_{im}a^{mk} = \delta_{ik}. \tag{55.21}$$

Совокупность величин a_{ik} можно рассматривать, как трехмерный пространственный метрический тензор; нам важны здесь, впрочем, только алгебраические их свойства.

Если мы положим

$$a = \operatorname{Det} a_{ik} \tag{55.22}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{a} = \operatorname{Det} a^{ik}, \tag{55.23}$$

то будет

$$g = -a g_{00}. \tag{55.24}$$

Из определения (55.20) непосредственно следует

$$g_{00}g^{0k} = \sum_{m=1}^{3} a^{mk}g_{m0}, \tag{55.25}$$

а также

$$g_{i0} = g_{00}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}g^{0k}. \tag{55.26}$$

Если величины $g^{\mu\nu}$ имеют значения (55.19), то будет

$$a^{ik} = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \tag{55.27}$$

и, следовательно,

$$a_{ik} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \tag{55.28}$$

Принимая во внимание значение g_{00}, получим

$$g_{00}a_{ik} = c^2\delta_{ik}, \tag{55.29}$$

причем относительная погрешность здесь будет более высокого порядка, чем U/c^2.

Отсюда, с той же относительной погрешностью,

$$g_{i0} = c^2 g^{i0}, \tag{55.30}$$

Используя эти формулы, получаем для ковариантных компонент фундаментального тензора выражения:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \qquad (55.31)$$

Зная приближенные значения g_{0i} и g^{0i}, мы можем теперь проверить, с какой точностью выполняется использованное нами равенство (55.11). Мы имеем приближенно

$$g_{00}g^{00} = 1 - \frac{16}{c^6} \sum_{i=1}^{3} U_i^2. \qquad (55.32)$$

Если U_i — порядка q^3, то это выражение отличается от единицы на величины порядка q^6/c^6. Следовательно, равенством (55.11) можно пользоваться не только в данном, но и в следующем приближении относительно U/c^2 (или v^2/c^2). Заметим, что из формулы (55.26) следует

$$g_{00}g^{00} = 1 - g_{00} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} g^{0i} g^{0k}. \qquad (55.33)$$

Здесь величина g_{00} положительна, а двойная сумма представляет определенную положительную форму, следовательно, будет всегда (вполне строго)

$$g_{00}g^{00} \leqslant 1, \qquad (55.34)$$

хотя отличие левой части (55.34) от единицы, как мы видели, весьма мало.

Выпишем теперь значения определителя g и умноженных на $\sqrt{-g}$ контравариантных компонент фундаментального тензора, которые мы обозначаем через

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \qquad (55.35)$$

Мы имеем

$$-g = c^2 + 4U \qquad (55.36)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \qquad (55.37)$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3} U_i, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \qquad (55.38)$$

Нам необходимо теперь оценить отброшенные нами в выражении для $R^{\mu\nu}$ члены, квадратичные в первых производных.

Эти члены имеют вид $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Для вычисления приближенных значений скобок Кристоффеля мы могли бы воспользоваться только что найденными приближенными значениями фундаментального тензора. Мы не будем, однако, проделывать здесь этих вычислений, так как квадратичные члены будут подробно вычисляться в главе VI, где уравнения тяготения будут решаться в следующем приближении. Здесь нам нужен только порядок величины квадратичных членов. Он будет следующий. Члены в R^{00} и R^{0i} будут шестого, а члены в R^{ik} — четвертого порядка относительно $1/c$. В рассматриваемом приближении эти члены на результат не влияют.

Нам остается проверить, выполняются ли в должном приближении условия гармоничности

$$\Gamma^{\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{55.39}$$

Выясним прежде всего, с какой точностью должны быть выполнены эти условия. Если в формуле (53.04) для $R^{\mu\nu}$ не вычеркивать членов $\Gamma^{\mu,\nu}$, а выписать их с точностью, соответствующей приближению (55.07) для остальных членов, мы получим вместо (55.07):

$$\left.\begin{aligned} R^{00} &= \frac{1}{2}\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g^{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Gamma^0}{\partial t}, \\ R^{0i} &= \frac{1}{2}\Delta g^{0i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g^{0i}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^0}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Gamma^i}{\partial t}\right), \\ R^{ik} &= \frac{1}{2}\Delta g^{ik} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Gamma^k}{\partial x_i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{55.40}$$

Для того чтобы члены с Γ^{ν}, которые мы отбрасывали, были действительно малы по сравнению с членами типа $\Delta g^{\mu\nu}$, принятыми во внимание, необходимо, чтобы Γ^0 было относительно c более высокого порядка малости, чем $1/c^4$, а Γ^i — более высокого, чем $1/c^2$. Эти условия в самом деле выполняются. Действительно, из (55.38) непосредственно видно, что Γ^i будет четвертого порядка относительно $1/c$. Что касается Γ^0, то здесь члены четвертого порядка равны

$$\Gamma^0 = -\frac{4}{c^4}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right). \tag{55.41}$$

Эти члены должны исчезать. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \tag{55.42}$$

Как видно из определения величин U и U_i (посредством дифференциальных уравнений с предельными условиями или посредством объемных интегралов), это равенство действительно выполняется в силу соотношения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0, \tag{55.43}$$

выражающего закон сохранения массы в ньютоновом приближении.

Таким образом, полученные нами для фундаментального тензора выражения действительно удовлетворяют, в первом приближении, как уравнениям тяготения, так и условиям гармоничности. Кроме того, они, очевидно, удовлетворяют предельным условиям на бесконечности. Соответствующее им выражение для квадрата элементарного интервала имеет вид:

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+ \\ +\frac{8}{c^2}(U_1\,dx_1+U_2\,dx_2+U_3\,dx_3)\,dt. \tag{55.44}$$

Обычно члены, содержащие произведения $dx_i\,dt$, не играют роли. Отбрасывая их, мы получим выражение

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \tag{55.45}$$

в которое входит только ньютонов потенциал. Это выражение уже было приведено нами без доказательства в § 51 [формула (51.11)].

§ 56. Уравнения тяготения в статическом случае

Фундаментальный тензор называется статическим, если его компоненты не зависят от временной координаты $x_0=t$, так что

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=0 \tag{56.01}$$

и если, кроме того,

$$g_{0i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{56.02}$$

Из физических соображений очевидно, что когда имеется несколько масс, то они должны двигаться *). Поэтому фундаментальный тензор может оказаться статическим только в случае одной массы. Несмотря на ограниченность физических применений, статический случай представляет известный интерес: во-первых, в этом случае легко исследовать вопрос об единственности решения и, во-вторых, в статическом случае можно указать строгое решение уравнений Эйнштейна со сферической симметрией.

*) Задача о движении системы масс подробно рассматривается в главе VI.