Как видно из определения величин $U$ и $U_i$ (посредством дифференциальных уравнений с предельными условиями или посредством объемных интегралов), это равенство действительно выполняется в силу соотношения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0, \tag{55.43}$$

выражающего закон сохранения массы в ньютоновом приближении.

Таким образом, полученные нами для фундаментального тензора выражения действительно удовлетворяют, в первом приближении, как уравнениям тяготения, так и условиям гармоничности. Кроме того, они, очевидно, удовлетворяют предельным условиям на бесконечности. Соответствующее им выражение для квадрата элементарного интервала имеет вид:

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+$$
$$+\frac{8}{c^2}(U_1\,dx_1+U_2\,dx_2+U_3\,dx_3)\,dt. \tag{55.44}$$

Обычно члены, содержащие произведения $dx_i\,dt$, не играют роли. Отбрасывая их, мы получим выражение

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \tag{55.45}$$

в которое входит только ньютонов потенциал. Это выражение уже было приведено нами без доказательства в § 51 [формула (51.11)].

## § 56. Уравнения тяготения в статическом случае

Фундаментальный тензор называется статическим, если его компоненты не зависят от временной координаты $x_0=t$, так что

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=0 \tag{56.01}$$

и если, кроме того,

$$g_{0i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{56.02}$$

Из физических соображений очевидно, что когда имеется несколько масс, то они должны двигаться *). Поэтому фундаментальный тензор может оказаться статическим только в случае одной массы. Несмотря на ограниченность физических применений, статический случай представляет известный интерес: во-первых, в этом случае легко исследовать вопрос об единственности решения и, во-вторых, в статическом случае можно указать строгое решение уравнений Эйнштейна со сферической симметрией.

*) Задача о движении системы масс подробно рассматривается в главе VI.

При условиях (56.01) и (56.02) мы можем положить

$$g_{00}=V^2;\quad g_{ik}=-a_{ik}, \tag{56.03}$$

после чего квадрат интервала напишется:

$$ds^2=V^2\,dt^2-\sum_{i,\,k=1}^{3}a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{56.04}$$

причем коэффициенты этой квадратичной формы не зависят от $t$. Для пространственной части квадрата интервала мы введем обозначение

$$dl^2=\sum_{i,\,k=1}^{3}a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{56.05}$$

так что формула (56.04) примет вид:

$$ds^2=V^2\,dt^2-dl^2. \tag{56.06}$$

Рассматривая, наряду с четырехмерной квадратичной формой (56.04), также и трехмерную форму (56.05), мы можем применять формулы тензорного анализа к обеим этим формам. Определяя величины $a^{ik}$ из уравнений (55.21), мы можем считать их контравариантными компонентами пространственного фундаментального тензора, соответствующего форме (56.05). Мы будем иметь

$$g^{00}=\frac{1}{V^2};\quad g^{0i}=0;\quad g^{ik}=-a^{ik}, \tag{56.07}$$

а также

$$\sqrt{-g}=V\sqrt{a},$$

где, согласно (55.22),

$$a=\operatorname{Det}a_{ik}. \tag{56.08}$$

Латинским значкам $i, k, \ldots$ мы придаем значения 1, 2, 3, а греческим значкам $\mu, \nu, \ldots$ — значения 0, 1, 2, 3.

Обозначим четырехмерные скобки Кристоффеля (для фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$) через $(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_g$ и трехмерные скобки Кристоффеля (для фундаментального тензора $a_{ik}$) — через $(\Gamma^{h}_{ik})_a$. Аналогично будем снабжать значками $g$ и $a$ тензорные величины, относящиеся к четырехмерному и к трехмерному случаю. Кроме того, положим

$$V_k=\frac{\partial V}{\partial x_k};\quad V^i=a^{ik}V_k \tag{56.09}$$

(в последней формуле подразумевается суммирование по $k$ от 1 до 3). Мы будем тогда иметь

$$(\Gamma^{h}_{ik})_g=(\Gamma^{h}_{ik})_a, \tag{56.10}$$

а также

$$(\Gamma^i_{00})_g = V \cdot V^i; \quad (\Gamma^0_{0i})_g = \frac{V_i}{V} \tag{56.11}$$

и, наконец,

$$(\Gamma^0_{00})_g = 0; \quad (\Gamma^0_{ik})_g = 0; \quad (\Gamma^k_{i0})_g = 0. \tag{56.12}$$

Припоминая общую формулу

$$R^\rho_{\sigma,\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\rho_{\alpha\mu}, \tag{56.13}$$

мы можем выразить четырехмерный тензор кривизны через трехмерный тензор.

Если ни один значок не равен нулю, мы будем иметь, вследствие (56.10),

$$(R^l_{i,hk})_g = (R^l_{i,hk})_a. \tag{56.14}$$

Если только один значок равен нулю, мы имеем

$$(R^0_{i,hk})_g = 0; \quad (R^l_{0,hk})_g = 0; \quad (R^l_{i,0k})_g = 0. \tag{56.15}$$

Нетрудно проверить также, что

$$(R^0_{0,hk}) = 0. \tag{56.16}$$

Применяя общую формулу (56.13) к случаю $\sigma = \mu = 0$ и пользуясь выражениями (56.10) — (56.12) для скобок Кристоффеля, будем иметь:

$$(R^l_{0,0k})_g = \frac{\partial}{\partial x_k}(V \cdot V^l) + V \cdot V^i (\Gamma^l_{ik})_a - V_k V^l =$$

$$= V\left(\frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a V^i\right). \tag{56.17}$$

Но величина

$$(V^l)_k = \frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a V^i \tag{56.18}$$

есть вычисленная по правилам трехмерного тензорного анализа ковариантная производная от вектора $V^l$. Вследствие (56.09) мы имеем

$$(V^l)_k = \left(a^{li}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_k = a^{li}V_{ik}, \tag{56.19}$$

где

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - (\Gamma^j_{ik})_a \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{56.20}$$

есть вторая ковариантная производная от $V$ (в трехмерном смысле). Так как $V_{ik} = V_{ki}$, то безразлично, который из двух значков $V_{ik}$ будет поднят; поэтому мы можем писать вместо $(V^l)_k$ просто $V^l_k$, после чего формула (56.17) примет вид:

$$(R^l_{0,\,0k})_g = V \cdot V^l_k. \tag{56.21}$$

Аналогично вычисляем

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{V_i}{V}\right) + \frac{V_i V_k}{V^2} - (\Gamma^j_{ik})_a \frac{V_j}{V} \tag{56.22}$$

и после небольшого преобразования

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56.23}$$

где $V_{ik}$ имеет значение (56.20).

Выразим теперь четырехмерный тензор Римана через трехмерные величины. По общей формуле (44.22) мы имеем

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu,\,\alpha\nu} = R^0_{\mu,\,0\nu} + R^l_{\mu,\,l\nu}. \tag{56.24}$$

Отсюда, вследствие (56.14) и (56.23),

$$(R_{ik})_g = (R_{ik})_a + \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56.25}$$

где $(R_{ik})_a$ есть трехмерный тензор Римана. Полагая же в (56.21) $l = k$ и суммируя по $k$, получим

$$(R_{00})_g = -V \cdot \Delta V, \tag{56.26}$$

где

$$\Delta V = V^k_k = a^{ik} V_{ik} \tag{56.27}$$

есть трехмерный оператор Лапласа, который можно написать в виде

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{a}\, a^{ik} \frac{\partial V}{\partial x_i}\right). \tag{56.28}$$

Что касается смешанных компонент четырехмерного тензора Римана, то вследствие (56.15) они равны нулю:

$$(R_{i0})_g = 0. \tag{56.29}$$

Выпишем также инвариант четырехмерного тензора Римана. Он равен

$$(R)_g = -\frac{2\,\Delta V}{V} - (R)_a, \tag{56.30}$$

где $(R)_a$ — инвариант соответствующего трехмерного тензора.

Подставляя найденные выражения в формулу

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{56.31}$$

мы можем выразить тензор Эйнштейна через трехмерные величины.

Вводя для консервативного тензора трехмерного пространства обозначение

$$A_{ik} = (R_{ik})_a - \frac{1}{2} a_{ik} (R)_a \tag{56.32}$$

и разумея под $A$ трехмерный инвариант этого тензора, равный

$$A = a^{ik} A_{ik} = -\frac{1}{2} (R)_a, \tag{56.33}$$

мы получим для составляющих тензора (56.31) выражения *):

$$G_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{V} (V_{ik} - a_{ik} \Delta V), \tag{56.34}$$

$$G_{i0} = 0, \tag{56.35}$$

$$G_{00} = -V^2 A. \tag{56.36}$$

Заметим, что, согласно (Г.13), трехмерные контравариантные составляющие $A^{ik}$ непосредственно выражаются через ковариантные составляющие трехмерного тензора кривизны четвертого ранга.

Согласно уравнениям тяготения Эйнштейна,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{56.37}$$

В случае пустого пространства $T_{\mu\nu} = 0$. Покажем, что единственным статическим решением уравнений Эйнштейна для пустого пространства, не имеющим особенных точек и удовлетворяющим предельным условиям, будет решение, соответствующее евклидову пространству и псевдо-евклидову пространству-времени.

В случае $G_{\mu\nu} = 0$ из написанных уравнений легко выводится

$$\Delta V = 0. \tag{56.38}$$

Это есть уравнение эллиптического типа для $V$, представляющее обобщение уравнения Лапласа. Функция $V$ должна на пространственной бесконечности стремиться к постоянному значению, а ее производные должны стремиться к нулю. Но единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим условиям, будет постоянное значение $V$. Если же $V$ постоянно, то тензориальные производные $V_{ik}$ равны нулю, а тогда уравнения $G_{ik} = 0$ дают $A_{ik} = 0$, и, следовательно, тензор кривизны трехмерного пространства равен нулю, а самое пространство — евклидово (см. Добавление Г).

## § 57. Строгое решение уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы

В случае одной сосредоточенной массы можно найти строгое решение уравнений тяготения, обладающее сферической симметрией. Так как нас интересует статическое решение, мы можем воспользоваться

*) Эти выражения приведены в книге Леви-Чивита [14].