Вводя для консервативного тензора трехмерного пространства обозначение

$$A_{ik} = (R_{ik})_a - \frac{1}{2} a_{ik} (R)_a \tag{56.32}$$

и разумея под A трехмерный инвариант этого тензора, равный

$$A = a^{ik} A_{ik} = -\frac{1}{2} (R)_a, \tag{56.33}$$

мы получим для составляющих тензора (56.31 выражения *):

$$G_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{V} (V_{ik} - a_{ik} \Delta V), \tag{56.34}$$

$$G_{i0} = 0, \tag{56.35}$$

$$G_{00} = -V^2 A. \tag{56.36}$$

Заметим, что, согласно (Г.13), трехмерные контравариантные составляющие A^{ik} непосредственно выражаются через ковариантные составляющие трехмерного тензора кривизны четвертого ранга.

Согласно уравнениям тяготения Эйнштейна,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{56.37}$$

В случае пустого пространства $T_{\mu\nu} = 0$. Покажем, что единственным статическим решением уравнений Эйнштейна для пустого пространства, не имеющим особенных точек и удовлетворяющим предельным условиям, будет решение, соответствующее евклидову пространству и псевдо-евклидову пространству-времени.

В случае $G_{\mu\nu} = 0$ из написанных уравнений легко выводится

$$\Delta V = 0. \tag{56.38}$$

Это есть уравнение эллиптического типа для V, представляющее обобщение уравнения Лапласа. Функция V должна на пространственной бесконечности стремиться к постоянному значению, а ее производные должны стремиться к нулю. Но единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим условиям, будет постоянное значение V. Если же V постоянно, то тензориальные производные V_{ik} равны нулю, а тогда уравнения $G_{ik} = 0$ дают $A_{ik} = 0$, и, следовательно, тензор кривизны трехмерного пространства равен нулю, а самое пространство — евклидово (см. Добавление Г).

§ 57. Строгое решение уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы

В случае одной сосредоточенной массы можно найти строгое решение уравнений тяготения, обладающее сферической симметрией. Так как нас интересует статическое решение, мы можем воспользоваться

*) Эти выражения приведены в книге Леви-Чивита [14].

формулами предыдущего параграфа и писать ds^2 в виде

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - dl^2, \tag{57.01}$$

где

$$dl^2 = a_{ik}\,dx_i\,dx_k. \tag{57.02}$$

Если x_1, x_2, x_3 — гармонические координаты, мы можем ввести соответствующие им сферические координаты, положив

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\sin\vartheta\cos\varphi,\\ x_2 &= r\sin\vartheta\sin\varphi\\ x_3 &= r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{57.03}$$

Предположению о сферической симметрии соответствует выражение для dl^2 вида

$$dl^2 = F^2\,dr^2 + \rho^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{57.04}$$

где F и ρ суть функции от одного r. При этом коэффициент V также должен зависеть только от r.

Заметим, что если ds^2 имеет принятый здесь вид, то оператор Даламбера от некоторой функции Ψ напишется

$$\Box\Psi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{1}{VF}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V\rho^2}{F}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \Delta^*\Psi\right\}, \tag{57.05}$$

где $\Delta^*\Psi$ есть оператор Лапласа на шаре:

$$\Delta^*\Psi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}. \tag{57.06}$$

Время t есть, очевидно, гармоническая переменная, так как $\Box t = 0$. Чтобы координаты (57.03) также были гармоническими переменными, необходимо выполнение условий $\Box x_i = 0$. Но если x_i есть одна из величин (57.03), то

$$\Delta^* x_i = -2x_i, \tag{57.07}$$

и условие гармоничности для x_i дает

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\rho^2}{F}\right) - 2r = 0. \tag{57.08}$$

Это есть дополнительное (помимо уравнений Эйнштейна) уравнение для величин V, F, ρ.

Составим теперь скобки Кристоффеля для дифференциальной формы (57.04). Мы должны положить

$$\left.\begin{aligned} &a_{rr} = F^2; \quad a_{\vartheta\vartheta} = \rho^2; \quad a_{\varphi\varphi} = \rho^2\sin^2\vartheta,\\ &a_{\vartheta\varphi} = 0; \quad a_{\varphi r} = 0; \quad a_{r\vartheta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57.09}$$

и для контравариантного трехмерного метрического тензора

$$\left.\begin{array}{lll} a^{rr}=\dfrac{1}{F^2}; & a^{\vartheta\vartheta}=\dfrac{1}{\rho^2}; & a^{\varphi\varphi}=\dfrac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}; \\ a^{\vartheta\varphi}=0; & a^{\varphi r}=0; & a^{r\vartheta}=0. \end{array}\right\} \tag{57.10}$$

Отсюда получаем по общим формулам следующие выражения для 18 скобок Кристоффеля:

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma^r_{rr}=\dfrac{F'}{F}; & \Gamma^\vartheta_{rr}=0; & \Gamma^\varphi_{rr}=0, \\ \Gamma^r_{\vartheta\vartheta}=-\dfrac{\rho\rho'}{F^2}; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta}=0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta}=0, \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\dfrac{\rho\rho'}{F^2}\sin^2\vartheta; & \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}=-\sin\vartheta\cos\vartheta; & \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}=0, \\ \Gamma^r_{r\vartheta}=0; & \Gamma^\vartheta_{r\vartheta}=\dfrac{\rho'}{\rho}; & \Gamma^\varphi_{r\vartheta}=0, \\ \Gamma^r_{r\varphi}=0; & \Gamma^\vartheta_{r\varphi}=0; & \Gamma^\varphi_{r\varphi}=\dfrac{\rho'}{\rho}, \\ \Gamma^r_{\vartheta\varphi}=0; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi}=0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}=\operatorname{ctg}\vartheta, \end{array}\right\} \tag{57.11}$$

где штрихом обозначены производные по r.

Заметим, что каждая строчка этой таблицы дает взятые с обратным знаком коэффициенты при первых производных $\dfrac{\partial V}{\partial r}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ в выражении для второй ковариантной производной от некоторой функции V. Так как эти выражения нам пригодятся, мы их здесь выпишем:

$$\left.\begin{aligned} V_{rr}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{F'}{F}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\vartheta\vartheta}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+\frac{\rho\rho'}{F^2}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\varphi\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\rho\rho'}{F^2}\sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial r}+\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\vartheta}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \vartheta}-\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \varphi}-\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ V_{\vartheta\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\,\partial \varphi}-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{57.12}$$

С другой стороны, каждый столбец таблицы (57.11) дает коэффициенты при квадратах и произведениях первых производных в уравнениях пространственной геодезической линии, которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}+\frac{F'}{F}\dot{r}^2-\frac{\rho\rho'}{F^2}(\dot{\vartheta}^2+\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)=0,\\ \ddot{\vartheta}+2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\vartheta}\dot{r}-\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2=0,\\ \ddot{\varphi}+2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{r}+2\operatorname{ctg}\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}=0,\end{aligned}\right\} \tag{57.13}$$

где точка обозначает дифференцирование по длине дуги $\left(\dot{r}=\frac{dr}{dl}\right.$ и т. д.). Практически скобки Кристоффеля легче всего вычислять не по общим формулам, а путем составления уравнений геодезической линии непосредственно из вариационного начала.

При помощи выписанных в таблице (57.11) скобок Кристоффеля составляем трехмерный тензор кривизны четвертого ранга, а затем по формулам

$$\left.\begin{aligned} (R_{rr})_a&=R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}+R^{\varphi}_{r,\,\varphi r},\\ (R_{\vartheta\vartheta})_a&=R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta}+R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta},\\ (R_{\varphi\varphi})_a&=R^{r}_{\varphi,\,r\varphi}+R^{\vartheta}_{\varphi,\,\vartheta\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{57.14}$$

— трехмерный тензор кривизны второго ранга. Аналогичных формул для не-диагональных компонент мы не выписываем, так как эти последние оказываются равными нулю.

Оставляя только члены, отличные от нуля, получаем по общей формуле (56.13):

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}=\frac{\partial\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}}{\partial r}+\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r}-\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}. \tag{57.15}$$

Подставляя сюда значения скобок Кристоффеля из (57.11), получим, после небольшого преобразования,

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}=\frac{F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.16}$$

Вычисление показывает, что величина $R^{\varphi}_{r,\,\varphi r}$ имеет то же самое значение

$$R^{\varphi}_{r,\,\varphi r}=\frac{F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right), \tag{57.17}$$

поэтому

$$(R_{rr})_a=\frac{2F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.18}$$

Далее,

$$R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta}=-\frac{\partial\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}}{\partial r}+\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r}\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}-\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}\Gamma^{r}_{rr}, \tag{57.19}$$

откуда

$$R^r_{\vartheta,\,r\vartheta} = \frac{\rho}{F}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.20}$$

Продолжая вычисления, получаем

$$R^\varphi_{\vartheta,\,\varphi\vartheta} = \frac{\partial\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}}{\partial\vartheta} + \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} - \Gamma^r_{\vartheta\vartheta}\Gamma^\varphi_{r\varphi}, \tag{57.21}$$

откуда

$$R^\varphi_{\vartheta,\,\varphi\vartheta} = -1 + \frac{\rho'^2}{F^2}. \tag{57.22}$$

Подставляя (57.20) и (57.22) в (57.14), находим для $(R_{\vartheta\vartheta})_a$ выражение

$$(R_{\vartheta\vartheta})_a = \frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho'}{F}\right) - 1. \tag{57.23}$$

Аналогичные вычисления дают

$$(R_{\varphi\varphi})_a = \sin^2\vartheta\,(R_{\vartheta\vartheta})_a, \tag{57.24}$$

что и следовало ожидать в силу сферической симметрии. Мы уже упоминали, что

$$(R_{r\vartheta})_a = 0; \quad (R_{r\varphi})_a = 0; \quad (R_{\vartheta\varphi})_a = 0. \tag{57.25}$$

Инвариант трехмерного тензора кривизны вычисляется по формуле

$$(R)_a = \frac{1}{F^2}(R_{rr})_a + \frac{2}{\rho^2}(R_{\vartheta\vartheta})_a \tag{57.26}$$

и может быть представлен в виде

$$(R)_a = \frac{2}{\rho^2\rho'}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho'^2}{F^2} - \rho\right). \tag{57.27}$$

Найденные формулы позволяют выписать уравнения тяготения Эйнштейна в раскрытом виде.

Если тензор массы равен нулю, то уравнения тяготения приводятся к виду

$$(R_{\mu\nu})_g = 0. \tag{57.28}$$

Вследствие (56.25) пространственные компоненты этого тензора дают в статическом случае

$$V(R_{ik})_a + V_{ik} = 0. \tag{57.29}$$

Компонента со значками (0, 0) приводит к уравнению

$$\Delta V = 0. \tag{57.30}$$

Уравнения для смешанных компонент (со значками $0i$) удовлетворяются тождественно.

Уравнения (57.29) и (57.30) являются тензорными уравнениями в смысле трехмерного тензорного анализа; каждому из значков i, k мы можем приписать значение r, ϑ, φ, как это мы и делали в предыдущих рассуждениях этого параграфа. При этом уравнения для не-диагональных компонент (r, ϑ), (r, φ) и (ϑ, φ) удовлетворятся тождественно в силу равенств (57.25) и вытекающих из (57.12) аналогичных равенств

$$V_{r\vartheta} = 0; \quad V_{r\varphi} = 0; \quad V_{\vartheta\varphi} = 0 \tag{57.31}$$

для ковариантных производных от функции V, зависящей только от r. Далее, вследствие равенства (57.24) и вытекающего из (57.12) аналогичного равенства

$$V_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta V_{\vartheta\vartheta} \tag{57.32}$$

уравнение для компоненты (φ, φ) совпадает с уравнением для компоненты (ϑ, ϑ). Таким образом, из шести уравнений (57.29) будут независимыми следующие два:

$$V(R_{rr})_a + V_{rr} = 0, \tag{57.33}$$

$$V(R_{\vartheta\vartheta})_a + V_{\vartheta\vartheta} = 0. \tag{57.34}$$

Подставляя в (57.33) выражение для $(R_{rr})_a$ из (57.18) и выражение для V_{rr} из (57.12), получаем:

$$\frac{2VF}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right) + V'' - \frac{F'}{F}V' = 0. \tag{57.35}$$

Аналогично, после подстановки (57.23) и (57.12) в (57.34) будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho' V}{F}\right) - VF = 0. \tag{57.36}$$

Наконец, уравнение (57.30) напишется

$$V'' - \frac{F'}{F}V' + \frac{2\rho'}{\rho}V' = 0. \tag{57.37}$$

Последние три уравнения нетрудно решить. Комбинируя (57.35) и (57.37), получим

$$V\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right) - \frac{\rho'}{F}\cdot V' = 0, \tag{57.38}$$

откуда

$$\frac{\rho'}{VF} = \text{const.} \tag{57.39}$$

Значение постоянной определяется предельными условиями: на бесконечности должно быть

$$\rho' = 1; \quad F = 1; \quad V = c \qquad (\text{при } r \to \infty). \tag{57.40}$$

Отсюда

$$VF = c\rho', \tag{57.41}$$

где c — скорость света. Подставляя это значение VF в (57.36) и интегрируя, получим

$$\frac{\rho\rho' V}{F} - c\rho = \text{const} \tag{57.42}$$

и, пользуясь снова соотношением (57.41),

$$\rho\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \text{const}. \tag{57.43}$$

Значение постоянной интегрирования можно определить из сравнения с теорией Ньютона. Если M есть значение сосредоточенной массы, то на больших расстояниях должно быть

$$V^2 = c^2 - 2U; \quad U = \frac{\gamma M}{r}, \tag{57.44}$$

причем

$$\lim \frac{\rho}{r} = 1. \tag{57.45}$$

Отсюда

$$\rho \cdot (c^2 - V^2) = 2\gamma M \tag{57.46}$$

и, следовательно,

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\rho}. \tag{57.47}$$

До сих пор было использовано только уравнение (57.36) и одна комбинация [а именно (57.38)] уравнений (57.35) и (57.37). Необходимо еще проверить, что последние два уравнения выполняются в отдельности. Напишем уравнение (57.37) в виде

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V'\rho^2}{F}\right) = 0. \tag{57.48}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (57.47), получим

$$VV' = \frac{\gamma M}{\rho^2}\rho'. \tag{57.49}$$

В соединении с (57.41) это дает

$$\frac{V'\rho^2}{F} = \frac{\gamma M}{c} = \text{const}, \tag{57.50}$$

и, следовательно, уравнение (57.37) выполняется. Таким образом, из трех уравнений: (57.35), (57.36), (57.37) — независимыми являются только два.

Так как, в силу (57.41)

$$F\,dr = \frac{c}{V}\,d\rho, \tag{57.51}$$

то подстановка найденных значений F и V в выражение для ds^2 дает

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - \frac{c^2}{V^2}\,d\rho^2 - \rho^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{57.52}$$

где V^2 имеет значение

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\rho}. \tag{57.47}$$

Пока используются только уравнения тяготения, а условия гармоничности для координат не учитываются, величина ρ будет произвольной функцией от r (и, следовательно, r будет произвольной функцией от ρ). Но условия гармоничности координат приводят к тому, что эта функция определяется однозначным образом. В самом деле, из условия гармоничности

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\rho^2}{F}\right) - 2r = 0 \tag{57.08}$$

и соотношения

$$VF = c\rho' \tag{57.41}$$

получаем

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V^2\rho^2}{c^2}\frac{dr}{d\rho}\right) - 2r = 0. \tag{57.53}$$

Подставляя сюда значение V^2 из (57.47), будем иметь

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2 - 2\alpha\rho)\frac{dr}{d\rho}\right] - 2r = 0, \tag{57.54}$$

где мы положили для краткости

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{57.55}$$

Область изменения ρ есть

$$\rho \geqslant 2\alpha, \tag{57.56}$$

так как только в этой области будет $V^2 \geqslant 0$.

При помощи подстановки

$$\rho = \alpha\,(1 + z) \tag{57.57}$$

уравнение (57.54) приводится к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2 - 1)\frac{dr}{dz}\right] - 2r = 0 \tag{57.58}$$

для области

$$z \geqslant 1. \tag{57.59}$$

Общее решение уравнения Лежандра (57.58) есть

$$r = CP_1(z) + C'Q_1(z), \tag{57.60}$$

где

$$P_1(z) = z; \quad Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 \tag{57.61}$$

функции Лежандра первого и второго рода. При $z=1$ функция Q_1 обращается в бесконечность. Поэтому член, содержащий Q_1, должен отсутствовать, и в (57.60) остается член, пропорциональный z. Из сравнения значений ρ и r при больших z нетрудно заключить, на основании (57.40) или (57.45), что

$$r = \alpha z. \tag{57.62}$$

Таким образом, мы имеем окончательно

$$\rho = r + \alpha. \tag{57.63}$$

Подстановка этого значения ρ в найденное выражение для ds^2 дает

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{57.64}$$

где, согласно (57.55), постоянная α пропорциональна значению сосредоточенной массы M.

Выражение для ds^2 в форме (57.52) (в произвольных, не-гармонических координатах) было впервые получено Шварцшильдом [18] и часто называется по имени этого автора.

§ 58. Движение перигелия планеты

Найденное строгое решение уравнений тяготения может быть применено к исследованию поля тяготения Солнца и планет.

Мы имеем

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{58.01}$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{58.02}$$

Пропорциональная массе M постоянная α имеет размерность длины и называется гравитационным радиусом массы M. Для Солнца, и тем более для планет, гравитационный радиус α во много раз меньше геометрического радиуса L (в качестве L можно взять радиус шара одинакового объема с данным телом). Мы можем составить следующую табличку:

	Солнце	Земля	Луна
α	1,48 *км*	0,443 *см*	0,0053 *см*
L	696 000 *км*	6370 *км*	1738 *км*
$\alpha:L$	$2\cdot10^{-6}$	$7\cdot10^{-10}$	$3\cdot10^{-11}$

Для сверхплотных звезд величина α того же порядка, как для Солнца, тогда как L, хотя и меньше, чем для Солнца, но все же не более чем во сто раз. Благодаря малости отношения $\alpha:L$ метрика