функции Лежандра первого и второго рода. При $z=1$ функция Q_1 обращается в бесконечность. Поэтому член, содержащий Q_1, должен отсутствовать, и в (57.60) остается член, пропорциональный z. Из сравнения значений ρ и r при больших z нетрудно заключить, на основании (57.40) или (57.45), что

$$r = \alpha z. \tag{57.62}$$

Таким образом, мы имеем окончательно

$$\rho = r + \alpha. \tag{57.63}$$

Подстановка этого значения ρ в найденное выражение для ds^2 дает

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{57.64}$$

где, согласно (57.55), постоянная α пропорциональна значению сосредоточенной массы M.

Выражение для ds^2 в форме (57.52) (в произвольных, не-гармонических координатах) было впервые получено Шварцшильдом [18] и часто называется по имени этого автора.

§ 58. Движение перигелия планеты

Найденное строгое решение уравнений тяготения может быть применено к исследованию поля тяготения Солнца и планет.

Мы имеем

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{58.01}$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{58.02}$$

Пропорциональная массе M постоянная α имеет размерность длины и называется гравитационным радиусом массы M. Для Солнца, и тем более для планет, гравитационный радиус α во много раз меньше геометрического радиуса L (в качестве L можно взять радиус шара одинакового объема с данным телом). Мы можем составить следующую табличку:

	Солнце	Земля	Луна
α	1,48 *км*	0,443 *см*	0,0053 *см*
L	696 000 *км*	6370 *км*	1738 *км*
$\alpha : L$	$2\cdot10^{-6}$	$7\cdot10^{-10}$	$3\cdot10^{-11}$

Для сверхплотных звезд величина α того же порядка, как для Солнца, тогда как L, хотя и меньше, чем для Солнца, но все же не более чем во сто раз. Благодаря малости отношения $\alpha : L$ метрика пространства-времени мало отличается от евклидовой даже вблизи и внутри масс. Однако нужно помнить, что, согласно (55.45), уже в ньютоновом приближении величина g_{00} отлична от постоянной и равна $c^2 - 2U$ и что отклонение от постоянного значения величины g_{00} проявляется (для медленных движений) гораздо более чувствительным образом, чем такие же относительные отклонения в пространственной части интервала.

Сравним найденное строгое решение уравнений тяготения с приближенным решением, рассмотренным в § 55. Для этого нам нужно перейти в (58.01) от сферических координат к прямоугольным, которые будут гармоническими. Мы можем представить в (58.01) пространственную часть

$$dl^2 = \frac{r+\alpha}{r-\alpha} dr^2 + (r+\alpha)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \tag{58.03}$$

в виде

$$dl^2 = \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^2} dr^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{58.04}$$

В последнем выражении уже легко перейти к прямоугольным координатам, и мы получим

$$ds^2 = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha} dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \\ - \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)^2, \tag{58.05}$$

откуда

$$g_{ik} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \delta_{ik} - \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^4} x_i x_k \tag{58.06}$$

и, кроме того,

$$g_{00} = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha}; \quad g_{0i} = 0. \tag{58.07}$$

Пренебрегая в (58.05) квадратом отношения α/r, мы придем к приближенной формуле (55.45), в которой

$$U = c^2 \frac{\alpha}{r} = \frac{\gamma M}{r} \tag{58.08}$$

есть ньютонов потенциал.

Из формул (58.06) и (58.07) получается следующее значение определителя g в гармонических координатах:

$$g = -c^2 \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^4. \tag{58.09}$$

Заметим, что величина

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}} = 1 + \frac{\alpha}{r} \tag{58.10}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа с евклидовыми коэффициентами. В следующей главе (§ 68) мы увидим, что корень четвертой степени из $(-g/c^2)$ и в общем случае приближенно удовлетворяет уравнению Даламбера с евклидовыми коэффициентами.

Из тех же формул (58.06) и (58.07) или же путем непосредственного преобразования равенства

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}=\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{(r+\alpha)^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right] \tag{58.11}$$

к прямоугольным координатам получаются значения контравариантных компонент фундаментального тензора. Мы выпишем эти компоненты, умноженные на $\sqrt{-g}$. Мы будем иметь

$$\mathfrak{g}^{ik}=\sqrt{-g}\,g^{ik}=-c\delta_{ik}+c\alpha^2\frac{x_ix_k}{r^4}, \tag{58.12}$$

а также

$$\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{1-\frac{\alpha}{r}};\quad \mathfrak{g}^{0i}=0. \tag{58.13}$$

Эти формулы позволяют без труда проверить, что наши координаты действительно гармонические и что

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{58.14}$$

Зная потенциалы тяготения для поля сосредоточенной массы, мы можем определить движение частицы в этом поле в предположении, что частица движется по геодезической линии. Как мы видели в § 51, это предположение находится в согласии с механикой Ньютона. Более полное обоснование этого закона движения материальной точки будет дано в § 63 на основе уравнений тяготения.

Уравнения геодезической линии получаются, как мы знаем, из вариационного принципа

$$\delta\int ds=0, \tag{58.15}$$

который может быть написан в виде

$$\delta\int L\,dt=0, \tag{58.16}$$

где функция Лагранжа L в нашем случае равна корню квадратному из выражения

$$L^2=c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-$$
$$-\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\frac{\alpha^2}{r^4}(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2+x_3\dot{x}_3)^2, \tag{58.17}$$

где точки сверху обозначают производные по времени. Таким образом, мы имеем здесь простую задачу механики материальной точки.

Для решения этой задачи обратим, прежде всего, внимание на тот факт, что функция Лагранжа обладает сферической симметрией. Это значит, что функция Лагранжа не меняется при линейной ортогональной подстановке над величинами x_1, x_2, x_3, сопровождаемой такой же подстановкой над величинами $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$. Отсюда следует, как обычно в механике (см. также § 27 этой книги), существование интегралов площадей в виде

$$\left.\begin{aligned} x_2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - x_3\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= c_1, \\ x_3\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - x_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= c_2, \\ x_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - x_2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{58.18}$$

Это позволяет заключить о том, что траектория частицы лежит в плоскости

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0. \tag{58.19}$$

Беря эту плоскость за одну из координатных плоскостей, мы можем без ограничения общности положить

$$x_3 = 0; \quad \dot{x}_3 = 0 \tag{58.20}$$

и рассматривать плоское движение. Последнее удобнее всего изучать в полярных координатах, к которым приводятся наши сферические координаты, если мы положим

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad \dot{\vartheta} = 0. \tag{58.21}$$

Переписывая квадрат функции Лагранжа в полярных координатах, будем иметь:

$$L^2 = c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\dot{r}^2 - (r+\alpha)^2\dot{\varphi}^2. \tag{58.22}$$

Функция Лагранжа не зависит ни от времени t, ни от угла φ. Это сразу дает нам два интеграла:

$$\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \text{const}, \tag{58.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}, \tag{58.24}$$

которые соответствуют обычным интегралу энергии и интегралу площадей. Помня, что

$$L\,dt = ds = c\,d\tau, \tag{58.25}$$

где τ — собственное время, мы можем переписать интегралы (58.23) и (58.24) в виде

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau}=\varepsilon, \tag{58.26}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau}=\mu, \tag{58.27}$$

где ε и μ — постоянные. Величина μ может быть истолкована, как момент количества движения единицы массы. Если положить

$$\varepsilon=1+\frac{E_0}{c^2}, \tag{58.28}$$

где E_0 — новая постоянная, то из наших формул следует, что в нерелятивистском приближении будет

$$E_0=\frac{1}{2}v^2-\frac{\gamma M}{r}, \tag{58.29}$$

так что E_0 есть отнесенная к единице массы полная энергия частицы.

Алгебраическим следствием уравнений (58.26) и (58.27) является соотношение

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=c^2\varepsilon^2-c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}-\frac{\mu^2(r-\alpha)}{(r+\alpha)^3}. \tag{58.30}$$

Оно выводится подстановкой (58.26) и (58.27) в тождество

$$c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-(r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=c^2. \tag{58.31}$$

Предыдущие формулы дают три дифференциальных уравнения первого порядка для величин r, ϑ, φ как функций от τ. Решение этих уравнений, очевидно, сводится к квадратурам. Мы не будем выписывать в явной форме соответствующих интегралов, а ограничимся исследованием траектории частицы, т. е. зависимости r от φ.

Исключая $d\tau$ из (58.27) и (58.30), получаем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{c^2\varepsilon^2}{\mu^2}(r+\alpha)^4-\frac{c^2}{\mu^2}(r+\alpha)^3(r-\alpha)-(r+\alpha)(r-\alpha). \tag{58.32}$$

Справа стоит здесь многочлен четвертой степени от r. Следовательно, φ выражается через r в виде эллиптического интеграла первого рода и, обратно, r есть эллиптическая функция от φ. Вещественный период этой эллиптической функции будет несколько отличен от 2π; поэтому орбита не будет замкнутой. Многочлен в правой части (58.32) имеет, кроме очевидного отрицательного корня $r=-\alpha$, малый положительный корень

$$r_0\sim\alpha+\frac{8\alpha^3c^2\varepsilon^2}{\mu^2} \tag{58.33}$$

и еще два корня r_1 и r_2. Если $\varepsilon^2 < 1$, то оба эти корня положительны и мы будем иметь всегда $r_1 < r < r_2$ (финитное движение). Если же $\varepsilon^2 > 1$, то один из корней (r_1 или r_2) становится отрицательным; обозначая остающийся положительный корень через r_1, мы будем иметь $r_1 < r$, и орбита будет уходить на бесконечность. При $\varepsilon^2 = 1$ будет $r_2 = \infty$.

Если ввести вместо r переменную

$$u = \frac{1}{r} \tag{58.34}$$

и писать многочлен в раскрытом виде, то будет:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2 + \\ + \frac{2\alpha^3 c^2(2\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}u^3 + \alpha^2\left(1 + \frac{\alpha^2 c^2(\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}\right)u^4. \tag{58.35}$$

Оценим в этом выражении порядок величины отдельных членов. Введем, как в § 55, характерную скорость q и характерную длину l. Тогда по порядку величины будет

$$\varepsilon^2 - 1 \sim \frac{q^2}{c^2}; \quad \mu^2 \sim l^2 q^2,$$
$$\alpha \sim \frac{q^2}{c^2} l; \quad u \sim \frac{1}{l}.$$

На основе этих оценок нетрудно видеть, что в правой части (58.35) члены с нулевой, первой и второй степенью u имеют порядок величины $\frac{1}{l^2}$, члены же с третьей и четвертой степенью u — порядок величины $q^4/c^4 \cdot 1/l^2$. Поэтому, пренебрегая лишь весьма малыми величинами порядка q^4/c^4 (или α^2/l^2) по сравнению с единицей, мы можем отбросить в уравнении (58.35) последние два члена, после чего оно примет вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2. \tag{58.36}$$

Корни квадратичного многочлена будут соответствовать упомянутым выше корням r_1 и r_2. Мы положим

$$u_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1+e}{p}; \quad u_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1-e}{p}, \tag{58.37}$$

где p и e — новые постоянные, связанные с первоначально введенными постоянными ε и μ. Приближенно мы имеем

$$\left.\begin{aligned} 1 - \varepsilon^2 &= \frac{\alpha}{p}(1 - e^2), \\ \mu^2 &= \alpha c^2 p = \gamma M p. \end{aligned}\right\} \tag{58.38}$$

Положим также

$$\nu^2 = 1 - \frac{6\alpha}{p}, \tag{58.39}$$

откуда приближенно

$$\nu = 1 - \frac{3\alpha}{p}. \tag{58.40}$$

С этими обозначениями мы можем переписать уравнение (58.36) в виде

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2-1}{p^2} + \frac{2}{p}u - u^2. \tag{58.41}$$

Решение этого уравнения есть

$$u = \frac{1 + e\cos\nu\varphi}{p}. \tag{58.42}$$

Здесь постоянная интегрирования выбрана так, что наименьшему расстоянию r (наибольшему u) соответствует значение $\varphi = 0$. Выражение (58.42) хорошо передает общий характер движения. При $\nu = 1$ мы имели бы эллипс, параболу или гиперболу с параметром p и эксцентриситетом e. Рассмотрим случай эллипса ($e < 1$). Радиус-вектор r вернется к прежнему значению, когда угол φ увеличится не на 2π, а на несколько большую величину $2\pi/\nu$. Разность

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\nu} - 2\pi = \frac{6\pi\alpha}{p} \tag{58.43}$$

дает смещение перигелия за один период обращения планеты. Таким образом, орбита планеты может быть характеризована, как прецессирующий эллипс.

Заметим, что эйнштейновские уравнения движения для планеты приводятся к тому же виду, как и классические уравнения движения сферического маятника; поэтому траектория планеты имеет тот же вид, как траектория конца маятника *).

Для всех планет численное значение величины $\Delta\varphi$ весьма мало. Так, для Земли, полагая $p = 1{,}5 \cdot 10^8$ *км* и используя значение $\alpha = 1{,}5$ *км*, получим

$$\Delta\varphi = 6\pi 10^{-8} = 0{,}038''$$

за один оборот, т. е. за год, иначе говоря, 3,8″ в столетие. Для Меркурия смещение перигелия за столетие получается значительно больше (а именно 43″), во-первых, потому, что он находится значительно ближе к Солнцу (радиус его орбиты составляет 0,39 радиуса орбиты Земли) и, во-вторых, потому, что он обращается быстрее (за столетие он успевает совершить около 420 обращений).

При сравнении теории с опытом необходимо помнить, что движение перигелия происходит не только в силу эйнштейновского эффекта, но и в силу возмущающего влияния других планет,

*) См. чертеж в книге А. Н. Крылова [19].

отклонения их формы от сферической и т. п. Эти поправки превышают эйнштейновскую во много раз. Кроме того, нужно иметь в виду, что положение перигелия наблюдать тем труднее, чем меньше эксцентриситет e, т. е. чем ближе орбита к кругу; при $e=0$ положение перигелия перестает быть определенным. Тем не менее, астрономические средства наблюдения настолько точны и вычислительные возможности небесной механики настолько велики, что, в случае Меркурия, необъясненный ньютоновой теорией остаток в движении перигелия определяется с точностью до секунды в столетие. Этот остаток составляет 42,6″, в прекрасном согласии с теорией. Для Земли остаток определяется с несколько меньшей точностью и составляет около 4″, что также вполне согласуется с эйнштейновским значением.

§ 59. Отклонение луча света, проходящего мимо Солнца

Мы рассмотрим теперь другое наблюдаемое следствие эйнштейновской теории тяготения — отклонение луча света, проходящего мимо Солнца.

Мы составим себе сперва общую картину распространения света в поле тяготения Солнца, а затем уже перейдем к интегрированию уравнения луча.

Закон распространения фронта световой волны мы будем писать в виде, умноженном на $\sqrt{-g}$:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=0. \tag{59.01}$$

Пользуясь формулами (58.10) и (58.11), мы будем иметь, в сферических координатах:

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)^2\right]=0. \tag{59.02}$$

Если пренебрегать здесь членами порядка α^2/r^2 по сравнению с единицей, то уравнение для ω приведется к виду

$$\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-(\operatorname{grad}\omega)^2=0, \tag{59.03}$$

где

$$n^2=1+\frac{4\alpha}{r};\qquad n=1+\frac{2\alpha}{r}. \tag{59.04}$$

Это уравнение можно толковать, как закон распространения света в евклидовом пространстве, но в среде с показателем преломления n.