отклонения их формы от сферической и т. п. Эти поправки превышают эйнштейновскую во много раз. Кроме того, нужно иметь в виду, что положение перигелия наблюдать тем труднее, чем меньше эксцентриситет e, т. е. чем ближе орбита к кругу; при $e=0$ положение перигелия перестает быть определенным. Тем не менее, астрономические средства наблюдения настолько точны и вычислительные возможности небесной механики настолько велики, что, в случае Меркурия, необъясненный ньютоновой теорией остаток в движении перигелия определяется с точностью до секунды в столетие. Этот остаток составляет 42,6″, в прекрасном согласии с теорией. Для Земли остаток определяется с несколько меньшей точностью и составляет около 4″, что также вполне согласуется с эйнштейновским значением.

§ 59. Отклонение луча света, проходящего мимо Солнца

Мы рассмотрим теперь другое наблюдаемое следствие эйнштейновской теории тяготения — отклонение луча света, проходящего мимо Солнца.

Мы составим себе сперва общую картину распространения света в поле тяготения Солнца, а затем уже перейдем к интегрированию уравнения луча.

Закон распространения фронта световой волны мы будем писать в виде, умноженном на $\sqrt{-g}$:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=0. \tag{59.01}$$

Пользуясь формулами (58.10) и (58.11), мы будем иметь, в сферических координатах:

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2- \\ -\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)^2\right]=0. \tag{59.02}$$

Если пренебрегать здесь членами порядка α^2/r^2 по сравнению с единицей, то уравнение для ω приведется к виду

$$\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-(\operatorname{grad}\omega)^2=0, \tag{59.03}$$

где

$$n^2=1+\frac{4\alpha}{r}; \qquad n=1+\frac{2\alpha}{r}. \tag{59.04}$$

Это уравнение можно толковать, как закон распространения света в евклидовом пространстве, но в среде с показателем преломления n.

Заметим, что уравнение (59.03) может быть получено уже из приближенной формы

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (59.05)$$

для ds^2 [см. (55.45)], причем эффективный показатель преломления равен

$$n = 1 + \frac{2U}{c^2}. \qquad (59.06)$$

Напротив того, пригодная для медленных движений приближенная форма (51.10) для ds^2 привела бы к вдвое меньшему коэффициенту при U в выражении для эффективного показателя преломления. Как мы увидим ниже, с опытом согласуется выражение (59.06), соответствующее квадратичной форме (59.05).

Воображаемая среда с показателем преломления (59.06) будет вблизи Солнца оптически более плотной, чем вдали от него. Поэтому волна будет огибать Солнце, и луч будет уже не прямым. Как мы увидим ниже, луч будет иметь, примерно, форму ветви гиперболы, в фокусе которой находится Солнце. Угол между асимптотами гиперболы дает наблюдаемое отклонение луча.

Луч света является, как мы знаем из § 38, нулевой геодезической линией, для которой уравнение распространения фронта волны является уравнением Гамильтона — Якоби (см. также Добавление Г). Поскольку в предыдущем параграфе мы уже решили задачу о геодезической линии конечной длины, мы можем получить уравнение луча из формул § 58 путем предельного перехода. Напомним эти формулы. Мы имели интегралы движения

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\,\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon, \qquad (58.26)$$

$$(r+\alpha)^2\,\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu \qquad (58.27)$$

и уравнение траектории

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2\varepsilon^2}{\mu^2}(r+\alpha)^4 - \frac{c^2}{\mu^2}(r+\alpha)^3(r-\alpha) - (r+\alpha)(r-\alpha). \qquad (58.32)$$

Так как для луча света $d\tau = 0$, то постоянные ε и μ в формулах (58.26) и (58.27) будут бесконечно велики, отношение же их, равное

$$\frac{(r+\alpha)^3}{r-\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 \qquad (59.07)$$

будет конечным. Вследствие этого формула (58.32) примет вид

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{\mu_1^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha). \qquad (59.08)$$

Вместо постоянной μ_1 удобно ввести по формуле

$$\lim \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 = cb \tag{59.09}$$

другую постоянную b, имеющую размерность длины. Формула (59.08) перепишется тогда

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha), \tag{59.10}$$

а соответствующее уравнение для $u = 1/r$ будет иметь вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(1+\sigma u)^4 - u^2 + \alpha^2 u^4. \tag{59.11}$$

Если толковать r, φ как полярные координаты в евклидовой плоскости, то только что введенная постоянная b есть „прицельное расстояние", т. е. длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на асимптоту к траектории. В самом деле, из элементарных формул евклидовой геометрии на плоскости вытекает следующее выражение для длины перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, заданной в полярных координатах:

$$d = \frac{r}{\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}}. \tag{59.12}$$

Асимптота есть касательная в бесконечно удаленной точке ($u = 0$), а следовательно, прицельное расстояние есть значение d при $u = 0$; это значение получается из (59.11) и (59.12) равным b.

Вернемся к уравнению траектории луча в форме (59.11). Если считать величину u порядка $1/b$, то в этом уравнении члены, содержащие u^3 и u^4, будут по крайней мере порядка α^2/b^3 по сравнению с главными членами. Отбрасывая малые члены, мы получаем уравнение, которое решается элементарно. Решение будет иметь вид:

$$u = \frac{2\alpha}{b^2} + \frac{1}{b}\cos\varphi. \tag{59.13}$$

Постоянная интегрирования в (59.13) выбрана так, что значению $\varphi = 0$ соответствует наибольшее значение u (и, следовательно, наименьшее значение расстояния r). Приближенно

$$r_{\min} = b - 2\alpha. \tag{59.14}$$

В евклидовой плоскости r, φ уравнение (59.13) представляет гиперболу. Направления асимптот этой гиперболы определяются из условия $u = 0$, которое дает

$$\cos\varphi = -\frac{2\alpha}{b}. \tag{59.15}$$

Здесь правая часть есть малая отрицательная величина. Предельные значения угла φ будут поэтому равны

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta; \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta, \tag{59.16}$$

где малая положительная величина δ может быть положена равной

$$\delta = \frac{2\alpha}{b}. \tag{59.17}$$

Угол отклонения луча есть угол между асимптотами гиперболы, который равен

$$2\delta = \frac{4\alpha}{b}. \tag{59.18}$$

Смещение видимого положения звезды, от которой луч проходит вблизи Солнца, можно наблюдать во время полного солнечного затмения. Если положить величину b равной радиусу Солнца, то для угла отклонения 2δ получится значение

$$2\delta = 1'',75, \tag{59.19}$$

которое хорошо согласуется с наблюденными значениями. Обработка наблюдений затмения 1952 г. приводит к числу $1'',70$. Этот результат позволяет совершенно однозначно утверждать, что наблюдаемому закону распространения света соответствует выражение (59.05) для ds^2, но не выражение (51.10), которое дает вдвое меньшее число $0'',87$.

В заключение сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы (59.13). Гармонические координаты глубоко соответствуют, в рассматриваемых здесь случаях, природе пространства и времени, и определение прямой должно опираться на них. Что касается того соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений.

§ 60. Вариационный принцип для уравнений тяготения

В уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{60.01}$$

слева стоит консервативный тензор, а справа — тензор массы. В § 48 мы видели, что выражение для тензора массы может быть получено