Здесь правая часть есть малая отрицательная величина. Предельные значения угла φ будут поэтому равны

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta; \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta, \tag{59.16}$$

где малая положительная величина δ может быть положена равной

$$\delta = \frac{2\alpha}{b}. \tag{59.17}$$

Угол отклонения луча есть угол между асимптотами гиперболы, который равен

$$2\delta = \frac{4\alpha}{b}. \tag{59.18}$$

Смещение видимого положения звезды, от которой луч проходит вблизи Солнца, можно наблюдать во время полного солнечного затмения. Если положить величину b равной радиусу Солнца, то для угла отклонения 2δ получится значение

$$2\delta = 1'',75, \tag{59.19}$$

которое хорошо согласуется с наблюденными значениями. Обработка наблюдений затмения 1952 г. приводит к числу 1″,70. Этот результат позволяет совершенно однозначно утверждать, что наблюдаемому закону распространения света соответствует выражение (59.05) для ds^2, но не выражение (51.10), которое дает вдвое меньшее число 0″,87.

В заключение сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы (59.13). Гармонические координаты глубоко соответствуют, в рассматриваемых здесь случаях, природе пространства и времени, и определение прямой должно опираться на них. Что касается того соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений.

§ 60. Вариационный принцип для уравнений тяготения

В уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{60.01}$$

слева стоит консервативный тензор, а справа — тензор массы. В § 48 мы видели, что выражение для тензора массы может быть получено путем варьирования интеграла действия по компонентам фундаментального тензора. Так, в случае уравнений гидродинамики, интеграл действия может быть написан в виде

$$S = \int (\rho^* c^2 + \rho^* \Pi) \sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.02}$$

где величина ρ^* есть инвариантная плотность той части массы покоя, которая при движении не меняется и удовлетворяет уравнению неразрывности (48.29), а величина Π есть отнесенная к единице массы потенциальная энергия упругого сжатия жидкости, определяемая формулой (48.30). Если проварьировать интеграл S по компонентам фундаментального тензора, то получится

$$\delta_g S = \frac{c^2}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.03}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть гидродинамический тензор массы, определяемый формулой (48.39). В случае электродинамики интеграл действия имеет вид (47.37); главный член, зависящий от массы покоя, в нем тот же, как в гидродинамическом случае. Вариация электродинамического интеграла действия по величинам $g_{\mu\nu}$ также имеет вид (60.03), где уже $T^{\mu\nu}$ есть электродинамический тензор массы, определяемый формулами (46.22) и (46.32). Что касается вариации интеграла действия по другим входящим в него функциям (по смещениям и составляющим поля), то такая вариация дает, как мы знаем, уравнения движения рассматриваемой материальной системы.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая система такова, что для нее справедлива формула (60.03), где S — соответствующий интеграл действия. Тогда тензор массы, входящий в правую часть уравнений тяготения (60.01), может быть представлен, как коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}$ в выражении для вариации некоторого интеграла. Попытаемся представить в аналогичном виде также и левую часть уравнений тяготения, т. е. консервативный тензор.

Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int R \sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.04}$$

где R — скаляр кривизны, и составим его вариацию.

При вычислении вариации подинтегральной функции мы воспользуемся тем, что вариации скобок Кристоффеля $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ представляют тензор (хотя самые скобки Кристоффеля тензором не являются). Это доказывается следующим образом. Согласно (42.04), закон преобразования скобок Кристоффеля имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = -(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \tag{60.05}$$

Эта формула справедлива для величин $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, относящихся к данной метрике $(g_{\alpha\beta})$. Произведем здесь вариацию метрики, сохраняя связь между старыми и новыми координатами. Метрике $(g_{\alpha\beta}+\delta g_{\alpha\beta})$ будут соответствовать величины $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}+\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, причем будет

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\rho}}=(\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})'\frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{\nu}},\tag{60.06}$$

что и доказывает, что вариации $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ представляют смешанный тензор третьего ранга.

При составлении вариации скаляра R мы будем исходить из выражений

$$R^{\alpha}_{\mu,\beta\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta},\tag{60.07}$$

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha}\tag{60.08}$$

для смешанных компонент тензора кривизны четвертого ранга и для тензора кривизны второго ранга. В системе координат, геодезической в данной точке, вариация $R_{\mu\nu}$ равна

$$\delta R_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})-\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}),\tag{60.09}$$

так как в этой точке все скобки Кристоффеля равны нулю. Отсюда

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=g^{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu})-g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\tag{60.10}$$

(после перестановки некоторых значков в первом члене справа). Введем вектор

$$w^{\alpha}=g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}.\tag{60.11}$$

Нетрудно видеть, что равенство (60.10) равносильно следующему:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\sqrt{-g}w^{\alpha}),\tag{60.12}$$

так как в геодезической системе координат можно величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ вынести из-под знака производной. Но обе части равенства (60.12) представляют скаляры; поэтому, если это равенство справедливо в геодезической системе координат, то оно справедливо и вообще.

Предположим, что на границах области интегрирования в интеграле (60.04) исчезают не только самые вариации $\delta g_{\mu\nu}$, но и их производные, а следовательно, и величины $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, а также вектор w^{α}.

Тогда, написав интеграл I в виде

$$I=\int R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx)=\int R_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\,(dx), \tag{60.13}$$

мы получим для его вариации выражение

$$\delta I=\int R_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}\,(dx), \tag{60.14}$$

так как, в силу равенства (60.12), будет

$$\int \delta R_{\mu\nu}\cdot g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx)=0. \tag{60.15}$$

Используя формулы

$$\delta\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{60.16}$$

$$\delta g^{\mu\nu}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{60.17}$$

получаем

$$\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)=\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}. \tag{60.18}$$

Подставляя это выражение в (60.14) и производя суммирование по μ и по ν, будем иметь:

$$\delta I=\int\left(\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}R-R^{\alpha\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{60.19}$$

Наша ближайшая цель достигнута: консервативный тензор представлен в виде коэффициента при вариации фундаментального тензора.

Сопоставляя формулы (60.03) и (60.19), мы приходим к выводу, что вариация выражения

$$W=S-\frac{c^4}{16\pi\gamma}\,I \tag{60.20}$$

по компонентам фундаментального тензора равна

$$\delta_g W=\frac{c^2}{2}\int\left\{T^{\mu\nu}+\frac{c^2}{8\pi\gamma}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R\right)\right\}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{60.21}$$

Эта вариация исчезает в силу уравнений тяготения (60.01). В свою очередь, уравнения тяготения могут быть получены из вариационного начала $\delta W=0$, если производить вариацию по компонентам фундаментального тензора и считать величины $\delta g_{\mu\nu}$ произвольными. (Напомним, что в § 48 мы уже рассматривали вариацию интеграла действия по $g_{\mu\nu}$, но там величины $\delta g_{\mu\nu}$ не были вполне произвольными, так как соответствовали бесконечно малому преобразованию координат и выражались через четыре функции η_ν).

Варьируя же W по остальным функциям, входящим в интеграл действия S, мы получим уравнения движения и уравнения поля для этих функций.

Таким образом, уравнения тяготения (для гравитационного поля) объединяются с уравнениями для других полей (поле скоростей вещества, электромагнитное поле и др.) в одном общем вариационном принципе.

Вариационному принципу можно придать несколько другую форму, взяв вместо инвариантного интеграла

$$I = \int R\sqrt{-g}\,(dx) \tag{60.04}$$

другой, хотя и не инвариантный, но не содержащий зато вторых производных.

В Добавлении Б выведена формула

$$R = \Box y - \Gamma - L, \tag{60.22}$$

где $\Box y$ есть оператор Даламбера (Б.51), причем $y = \lg\sqrt{-g}$. Величина Γ выражается формулой (Б.43), а величину L можно, согласно (Б.54), написать в виде

$$L = g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right), \tag{60.23}$$

а также во многих других видах, приведенных в Добавлении Б.

При помощи обозначений (Б.59) и (Б.61) можно, вместо (60.22), написать также

$$R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu)\right) - L. \tag{60.24}$$

Интеграл I будет отличаться от выражения

$$I^* = -\int L\sqrt{-g}\,(dx) \tag{60.25}$$

на величину

$$I' = \int \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu)\right)(dx), \tag{60.26}$$

которая приводится к интегралу по поверхности и вариация от которой равна нулю. Поэтому вариации интегралов I и I^* равны:

$$\delta I = \delta\int R\sqrt{-g}\,(dx) = -\delta\int L\sqrt{-g}\,(dx) = \delta I^*. \tag{60.27}$$

Поскольку в вариационном начале важны не самые варьируемые интегралы, а лишь их вариации, можно в формуле (60.20) заменить I на I^*. При этом величина δI^* (равная δI) от координатной системы не зависит, несмотря на то, что самый интеграл I^* может зависеть от координатной системы. Целью замены I на I^* является исключение из подинтегрального выражения вторых производных. Вытекающая из (60.19) и (60.27) формула

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right) \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) \qquad (60.28)$$

может быть, разумеется, выведена и непосредственно, хотя соответствующие выкладки довольно сложны.

§ 61. О локальной эквивалентности полей ускорения и тяготения

Под принципом эквивалентности в теории тяготения понимают утверждение, согласно которому поле ускорения в каком-то смысле эквивалентно полю тяготения.

Принцип эквивалентности связан с фундаментальным законом равенства инертной и весомой массы, но с ним не тождественен. Закон равенства инертной и весомой массы, которым мы пользовались в § 51 при выводе уравнений тяготения, имеет общий, а не локальный характер, тогда как эквивалентность между полем ускорения и полем тяготения имеет место только локально, т. е. относится к одной точке пространства и к одному моменту времени.

Эквивалентность заключается в следующем. Путем введения надлежащей координатной системы (которая обычно толкуется, как ускоренно движущаяся система отсчета) можно так преобразовать уравнения движения материальной точки, находящейся в поле тяготения, что они будут (в новой системе отсчета) иметь вид уравнений движения *свободной* материальной точки. Тем самым поле тяготения как бы заменяется (или, лучше сказать, имитируется) полем ускорения. Благодаря закону равенства инертной и весомой массы такое преобразование будет одно и то же для любого значения массы материальной точки. Но оно будет достигать своей цели только в бесконечно малой области пространства и в течение бесконечно малого промежутка времени, т. е. оно будет строго локальным.

В общем случае указанное преобразование математически соответствует переходу к локально-геодезической системе координат (§ 42).

Можно пытаться толковать принцип эквивалентности менее локальным образом, т. е. применять его не к бесконечно малой, а к конечной области пространства, в которой, однако, поле должно быть однородным. Но тогда этот „принцип" будет справедлив лишь в той мере, в какой справедлива ньютонова механика. Он будет иметь место лишь для слабых однородных полей и для медленных движений (см. разобранный ниже пример).

Принцип эквивалентности сыграл большую роль в период, предшествовавший созданию Эйнштейном его теории тяготения. Приведем одно из относящихся к тому времени рассуждений Эйнштейна и проанализируем его.