из подинтегрального выражения вторых производных. Вытекающая из (60.19) и (60.27) формула

$$\delta \int L \sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right) \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) \qquad (60.28)$$

может быть, разумеется, выведена и непосредственно, хотя соответствующие выкладки довольно сложны.

§ 61. О локальной эквивалентности полей ускорения и тяготения

Под принципом эквивалентности в теории тяготения понимают утверждение, согласно которому поле ускорения в каком-то смысле эквивалентно полю тяготения.

Принцип эквивалентности связан с фундаментальным законом равенства инертной и весомой массы, но с ним не тождественен. Закон равенства инертной и весомой массы, которым мы пользовались в § 51 при выводе уравнений тяготения, имеет общий, а не локальный характер, тогда как эквивалентность между полем ускорения и полем тяготения имеет место только локально, т. е. относится к одной точке пространства и к одному моменту времени.

Эквивалентность заключается в следующем. Путем введения надлежащей координатной системы (которая обычно толкуется, как ускоренно движущаяся система отсчета) можно так преобразовать уравнения движения материальной точки, находящейся в поле тяготения, что они будут (в новой системе отсчета) иметь вид уравнений движения *свободной* материальной точки. Тем самым поле тяготения как бы заменяется (или, лучше сказать, имитируется) полем ускорения. Благодаря закону равенства инертной и весомой массы такое преобразование будет одно и то же для любого значения массы материальной точки. Но оно будет достигать своей цели только в бесконечно малой области пространства и в течение бесконечно малого промежутка времени, т. е. оно будет строго локальным.

В общем случае указанное преобразование математически соответствует переходу к локально-геодезической системе координат (§ 42).

Можно пытаться толковать принцип эквивалентности менее локальным образом, т. е. применять его не к бесконечно малой, а к конечной области пространства, в которой, однако, поле должно быть однородным. Но тогда этот „принцип“ будет справедлив лишь в той мере, в какой справедлива ньютонова механика. Он будет иметь место лишь для слабых однородных полей и для медленных движений (см. разобранный ниже пример).

Принцип эквивалентности сыграл большую роль в период, предшествовавший созданию Эйнштейном его теории тяготения. Приведем одно из относящихся к тому времени рассуждений Эйнштейна и проанализируем его.

Эйнштейн иллюстрирует свою „гипотезу эквивалентности" на примере лаборатории внутри падающего лифта. Все предметы внутри такого лифта как бы лишены тяжести: все они падают, вместе с лифтом, с одинаковым ускорением, так что их относительные ускорения равны нулю, даже когда они не закреплены относительно дна и стенок лифта. Мы имеем, говорит Эйнштейн, две системы отсчета: одну инерциальную (или почти инерциальную), связанную с землей, и другую, ускоренную, связанную с лифтом. В первой, инерциальной, системе существует поле тяготения, во второй, ускоренной, оно отсутствует. Таким образом, по Эйнштейну, ускорение может заменить собой тяготение, или, по крайней мере, однородное поле тяготения. Эту мысль Эйнштейн развивает и дальше. Он предлагает считать, что обе системы отсчета (ускоренная и неускоренная) физически вполне равноправны, и указывает, что с этой точки зрения говорить об абсолютном ускорении так же невозможно, как и об абсолютной скорости.

Разберем изложенную точку зрения Эйнштейна подробнее. Прежде всего возникает вопрос: что такое ускоренно движущаяся система отсчета и как она может быть физически реализована? В примере с лифтом „система отсчета" как бы отождествляется с некоторым ящиком (с клеткой лифта). Но мы знаем (см. конец § 32), что даже без учета тяготения абстракция абсолютно твердого тела не допустима; всякое тело будет при ускорении испытывать деформации, которые будут различны для различных тел. Поэтому для ускоренной системы отсчета непригодна также модель ящика или твердого каркаса, которую мы рассматривали в § 11 для инерциальной системы. Таким образом, в рассуждениях Эйнштейна остается без определения исходное понятие ускоренно движущейся системы отсчета. Это затруднение можно было бы обойти только наложив ограничения на величину ускорений и на размеры рассматриваемой области. Можно, например, потребовать следующее: допускаемые ускорения должны быть настолько малы, чтобы в рассматриваемой области можно было пренебречь вызываемыми ими деформациями и пользоваться понятием твердого тела. Но тогда станет ясным приближенный характер всего рассуждения Эйнштейна.

Далее, уже сам Эйнштейн подчеркивает, что не всякое поле тяготения может быть заменено ускорением: для возможности такой замены поле тяготения должно быть однородным. Это также налагает ограничения на пространственные размеры рассматриваемой области, в которой поля тяготения и ускорения приближенно эквивалентны. Нельзя, например, „уничтожить" поле тяготения вокруг земного шара: для этого пришлось бы ввести какую-то „ускоренно сжимающуюся" систему отсчета, что нелепо.

Ограничения должны быть наложены не только на пространственные размеры области, но и на промежутки времени, в течение которых возможна приближенная замена тяготения ускорением.

Эйнштейновский лифт не может падать неограниченно долго: он непременно разобьется.

Эйнштейн применял также свой принцип эквивалентности не локальным образом. Однако сделанная им в его работе 1911 г. попытка исследовать таким путем распространение света вблизи тяжелой массы привела его к вдвое меньшему значению отклонения светового луча, чем то, какое получается по его теории тяготения (см. § 59). Это связано с тем, что принцип эквивалентности никак не может дать для ds^2 правильного выражения (51.11), а может дать, самое большее, выражение (51.10), пригодное для медленных движений. Таким образом, и при не локальном толковании приближенная эквивалентность полей тяготения и ускорения ограничена в пространстве и во времени. Как мы уже говорили, эта эквивалентность имеет место лишь для слабых и однородных полей и для медленных движений.

Вследствие указанных ограничений, приближенная эквивалентность полей тяготения и ускорения, сама по себе, не заслуживает названия физического принципа и едва ли может служить удовлетворительным логическим основанием для построения теории тяготения. Физическим принципом, действительно пригодным для построения теории тяготения, является закон равенства инертной и тяготеющей массы. Этот закон и был положен нами в основу наших рассуждений.

Как мы упоминали, Эйнштейн полагал, что с точки зрения принципа эквивалентности говорить об абсолютном ускорении так же невозможно, как и об абсолютной скорости. Это заключение Эйнштейна представляется нам ошибочным. Оно основано на предположении о неразличимости полей ускорения и тяготения. Однако, хотя действия ускорения и тяготения неразличимы „в малом" (т. е. локально), но они безусловно различимы „в большом" (т. е. с учетом предельных условий, налагаемых на поле тяготения). Так, потенциал тяготения, который получается при введении равноускоренной системы отсчета, является линейной функцией от координат и, следовательно, не удовлетворяет условиям на бесконечности (там он должен был бы обращаться в нуль). Во вращающейся системе отсчета потенциал центробежных сил возрастает пропорционально квадрату расстояния от оси вращения; кроме того, там имеются силы Кориолиса. По этим признакам сразу можно обнаружить, что „поле тяготения" в этих системах отсчета является фиктивным.

Рассмотрим пример равноускоренной системы отсчета несколько подробнее, с учетом теории относительности. При этом мы оставим в стороне вопрос о реализации ускоренно движущейся системы отсчета и будем толковать термин „система отсчета" более формально, в смысле „координатная система". Сообразно этому, под переходом к ускоренно движущейся системе отсчета мы будем разуметь некоторое преобразование координат, содержащее нелинейным образом время.

Предположим, что истинное поле тяготения отсутствует и квадрат бесконечно малого интервала имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2). \tag{61.01}$$

где $(x'y'z't')$ — декартовы координаты и время в некоторой инерциальной системе отсчета. Произведем преобразование *) координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\,\mathrm{ch}\,\frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g}\left(\mathrm{ch}\,\frac{gt}{c} - 1\right); \\ y' &= y; \quad z' = z, \\ t' &= \frac{c}{g}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c} + \frac{x}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{61.02}$$

где g — постоянная, имеющая размерность ускорения. При условии

$$\frac{gt}{c} \ll 1 \tag{61.03}$$

предыдущие формулы могут быть написаны в виде

$$x' = x + \frac{1}{2}gt^2; \quad y' = y; \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{61.04}$$

Подстановка (61.02) в (61.01) дает

$$ds^2 = \left(c + \frac{gx}{c}\right)^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{61.05}$$

Спрашивается: можно ли толковать это выражение, как квадрат интервала в некоторой *инерциальной* системе отсчета, в которой существует поле тяготения? Ответ на этот вопрос есть в то же время ответ на вопрос о справедливости принципа эквивалентности.

Чтобы получить этот ответ, произведем сравнение выражения (61.05) с вытекающим из теории тяготения приближенным выражением

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{61.06}$$

где U есть ньютонов потенциал истинного поля тяготения.

При условии

$$|gx| \ll c^2 \tag{61.07}$$

коэффициенты при dt^2 приближенно совпадут, если мы возьмем потенциал тяготения равным

$$U = -gx. \tag{61.08}$$

---

*) Это преобразование указано Меллером [20].

Что касается коэффициента в пространственной части ds^2, то отличие его от единицы будет несущественным для таких интервалов, для которых величина

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{61.09}$$

удовлетворяет неравенству

$$v^2 \ll c^2. \tag{61.10}$$

Значение (61.08) потенциала тяготения действительно дает, по ньютоновой механике, равноускоренное движение. В случае нулевой начальной скорости мы будем иметь постоянные значения x', y', z' и приближенно

$$x + \frac{1}{2} gt^2 = \text{const}, \tag{61.11}$$

что соответствует равноускоренному движению в координатах (x, t).

Произведенное нами сравнение двух выражений для квадрата интервала показывает, что ускоренно движущаяся система отсчета при отсутствии тяготения действительно представляет известную аналогию *) с инерциальной системой отсчета при наличии поля тяготения. Однако это же сравнение указывает на то, что данная аналогия далеко не полна, так что не может быть и речи о полной эквивалентности или неразличимости полей ускорения и тяготения. Рассмотренный пример вполне подтверждает формулированное выше заключение о том, что „эквивалентность“ имеет место только в ограниченной области пространства и только для слабых и однородных полей и медленных движений [равенство (61.08) в соединении с неравенствами (61.07) и (61.10)].

Мы уже говорили о том, что если рассматривать всё пространство, то истинные поля тяготения можно отделить от фиктивных, вызванных ускорением.

В ньютоновой теории это можно сделать, используя предельные условия для ньютонова потенциала тяготения.

В эйнштейновой теории вопрос об отделении истинных полей тяготения от фиктивных проще всего решается в гармонических координатах (компоненты фундаментального тензора должны при этом удовлетворять предельным условиям, рассмотренным в § 54). Как будет показано в § 93, гармонические координаты определяются единственным образом, с точностью до преобразования Лоренца

*) Эту аналогию можно использовать при построении теории тяготения Возможность преобразовать выражение (61.01) к виду (61.05) дает указание на то, что ньютонов потенциал должен входить именно в коэффициент при dt^2. В этом отношении аналогия несомненно полезна. Впрочем, в § 51 мы выяснили вопрос о виде ds^2 в ньютоновом приближении, не прибегая к указанной аналогии.

Поэтому можно считать, что введение гармонических координат автоматически исключает все фиктивные поля тяготения. Так, для квадратичной формы (61.05) гармоническими координатами будут исходные переменные (61.02), в которых квадрат интервала имеет вид (61.01).

Условия гармоничности вообще не допускают тех произвольных преобразований координат [например, вида (61.02) или (61.04)], на рассмотрении которых основаны рассуждения о локальной эквивалентности. Но если даже оставить эти условия в стороне и пытаться толковать переменные (x, y, z, t) в формуле (61.05) как декартовы координаты и время, то такое толкование будет возможно только „в малом". Если же рассматривать выражение (61.05) „в большом", то непосредственно ясно, что такое толкование наталкивается на противоречия. Во-первых, коэффициент при dt^2 в этом выражении не удовлетворяет предельным условиям, так как обращается в бесконечность вместе с координатой x; во-вторых, этот коэффициент (а с ним и „скорость света") обращается в нуль на некоторой плоскости $\left(x = -\frac{c^2}{g}\right)$, что недопустимо.

Еще более явное нарушение предельных условий для фундаментального тензора получается в результате преобразования (35.47), которое в ньютоновой механике означает введение вращающейся координатной системы. Подстановка выражений (35.47) в (61.01) дает

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]\, dt^2 - 2\omega (y\, dx - x\, dy)\, dt - \\ - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (61.12)$$

Здесь фундаментальный тензор не только не удовлетворяет предельным условиям, но даже нарушает, на достаточно большом расстоянии от оси вращения, неравенства, установленные в § 35. Это показывает невозможность толкования выражения (61.12) в смысле „гипотезы эквивалентности".

В рассуждениях этого параграфа мы не пользовались общим тензорным анализом. Применение его к формулам (61.05) и (61.12) показало бы равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга, а тем самым и отсутствие истинных полей тяготения.

В заключение заметим, что при выводе уравнений тяготения Эйнштейна *мы ускоренно движущихся систем отсчета вообще не рассматривали*, а следовательно, и *не пользовались принципом эквивалентности*. Мы пользовались законом равенства инертной и весомой массы, который является общим законом и не имеет локального характера. Что касается принципа эквивалентности, то он не составляет отдельной физической гипотезы, а содержится в гипотезе о римановом характере пространства-времени. Математическим выражением его является, как мы уже говорили, возможность введения локально-геодезической системы координат (§ 42).