§ 62. О парадоксе часов

В заключение этой главы мы рассмотрим так называемый парадокс часов. Мы остановимся на нем не потому, что здесь заключен какой-либо особо важный или трудно разрешимый вопрос, а потому, что этот парадокс широко обсуждался в литературе, причем предлагались не вполне удовлетворительные его разъяснения.

Парадокс основан на неправильном применении понятия относительного движения и на игнорировании различия между инерциальными системами отсчета и неинерциальными. Состоит он в следующем.

Представим себе часы A, неподвижные в некоторой инерциальной системе отсчета. Пусть мимо них проходят с постоянной скоростью v часы B, которые, пройдя известный путь, испытывают отрицательное ускорение, меняют знак скорости и вновь проходят со скоростью $(-v)$ мимо часов B. В моменты прохождения часов A мимо часов B (туда и обратно) возможно непосредственное сравнение их показаний (без посредства световых сигналов). Такое сравнение должно обнаружить, что отстали часы B; по крайней мере, к такому выводу приводит применение формул для собственного времени, выведенных в § 14.

Но ведь движение относительно. Значит, можно считать неподвижными часы B. Другие же часы (A) будут, при таком рассмотрении, сперва равномерно удаляться, потом равномерно приближаться к часам B, и по тем же формулам § 14, как будто, должно оказаться, что теперь отстали часы A, в противоречии с полученным ранее результатом.

Разность показаний часов, находящихся в одной точке пространства, есть факт абсолютный и объективный (т. е. ни от системы отсчета, ни от способа рассмотрения не зависящий). Поэтому любой способ рассмотрения, если только он верен, должен приводить к одному и тому же результату. Противоречие в результате показывает, что где-то в рассуждениях допущена ошибка.

Нетрудно видеть, что ошибка заключена в неучете того, что часы A и часы B находились в этом воображаемом опыте в неодинаковых физических условиях: часы A никакому ускорению не подвергались и никаких толчков не испытывали, тогда как часы B подвергались ускорению и испытали толчок, изменивший знак их скорости. Другими словами, ошибка произошла из-за того, что обе системы отсчета (связанная с часами A и связанная с часами B) в приведенных рассуждениях предполагались равноправными, чего на самом деле нет: инерциальной является только система отсчета, связанная с часами A.

Таково качественное разъяснение парадокса. Количественная теория должна позволить вычислить показания ускоренно движущихся часов. Как было уже отмечено в конце § 14, так называемое собственное время τ, определяемое уравнением

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{62.01}$$

имеет простой физический смысл только в случае постоянной скорости v. Тогда это есть измеренная в „своей“ системе отсчета длительность локализованного процесса, связанного с движущейся точкой (показания движущихся часов). Если же скорость v переменна, то такое толкование величины (62.01) незаконно. Незаконное применение формулы (62.01) к ускоренному движению и явилось непосредственной причиной противоречия.

Чем же нужно заменить формулу (62.01) в случае ускоренного движения? Прежде всего нужно ясно себе представить, что не существует формулы, которая бы давала показания часов при произвольном ускоренном их движении. (Это обстоятельство почти всегда упускается из вида при изложении парадокса часов). В конце § 14 мы уже отмечали, что никакая теория не может, не входя в детали устройства часов, предсказать, как будут себя вести эти часы в условиях, когда они подвергаются толчкам или произвольному ускорению.

Можно, однако, ввести гипотезу, что в тех случаях, когда ускорение вызвано полем тяготения, показания часов при их свободном движении в поле тяготения выражаются формулой

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^t \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\, dt, \tag{62.02}$$

т. е. интегралом, условие максимума которого и дает уравнения свободного движения. В пользу этой гипотезы говорит то соображение, что поле тяготения, и только оно одно, обладает способностью проникать внутрь любого тела и действовать на все его части пропорционально их массе.

Если ввести эту гипотезу, то всякая возможность парадокса сама собою отпадает. В самом деле, показания часов A получатся тогда путем вычисления интеграла (62.02) вдоль траектории часов A; так же точно показания часов B получатся путем вычисления интеграла вдоль траектории часов B. Оба вычисляемые интеграла инвариантны по отношению к любой замене переменных (любому преобразованию координат и времени); пользование же разными системами отсчета (инерциальной и неинерциальной) равносильно вычислению одного и того же интеграла в разных переменных. Ясно, что несовпадение результатов при этом полностью исключается.

Заметим, что при разъяснении парадокса часов мы (в отличие от обычного рассмотрения) намеренно не пользовались „принципом эквивалентности“: ввиду приближенного характера этого принципа пользование им могло бы оставить сомнение в том, полностью ли устраняется парадокс рассуждениями, которые на этот принцип опираются.

Произведем теперь, на основе сделанной гипотезы, приближенное вычисление показаний часов, претерпевших ускорение. Мы будем пользоваться выражением для ds^2 в ньютоновом приближении, причем будем вести вычисления в инерциальной системе отсчета, в которой часы A неподвижны. Согласно формуле (51.07), мы имеем

$$\tau = \int_0^t \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62.03}$$

Пусть U_0 есть постоянное значение U в той точке, где находятся часы A. Если часы B в первый раз проходят мимо A в момент $t = 0$, а второй раз (в обратном направлении) — в момент $t = T$, то разность показаний часов A за этот промежуток времени равна

$$\tau_A = \int_0^T \left(1 - \frac{U_0}{c^2}\right) dt = \left(1 - \frac{U_0}{c}\right) T. \tag{62.04}$$

Здесь учтено влияние потенциала тяготения на ход часов [см. формулу (51.14)]. Для разности показаний часов B за тот же промежуток времени получим выражение

$$\tau_B = \int_0^T \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62.05}$$

Следовательно, часы B отстанут от часов A на величину

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2} \int_0^T \left(\frac{1}{2}v^2 + U - U_0\right) dt, \tag{62.06}$$

где интеграл взят вдоль траектории часов B. Заметим, что по закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2}v^2 - U = \frac{1}{2}v_0^2 - U_0, \tag{62.07}$$

где v_0 есть значение скорости часов B в той точке, где $U = U_0$. Соотношение (62.07) позволяет писать формулу (62.06) в различных других видах, например в виде

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2} \int_0^T \left(\frac{1}{2}v_0^2 + 2U - 2U_0\right) dt. \tag{62.08}$$

Относительно потенциала U мы предположим, что в рассматриваемой области он имеет вид

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 \quad (\text{при } x < x_1), \\ U &= U_0 + g(x_1 - x) \quad (\text{при } x > x_1). \end{aligned}\right\} \tag{62.09}$$

Пусть часы A все время находятся в начале координат, а движение часов B происходит по оси x. Координаты часов B будут

$$x = v_0 t \qquad (\text{при } t < t_1), \tag{62.10}$$

$$x = x_1 + v_0(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2 \qquad (\text{при } t_1 < t < t_2), \tag{62.11}$$

$$x = x - v_0(t - t_2) \qquad (\text{при } t > t_2). \tag{62.12}$$

Здесь t_1 и t_2 — времена прямого и обратного прохождения часов B через точку $x = x_1$. Эти времена равны

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0}; \qquad t_2 = t_1 + \frac{2v_0}{g} = t_1 + t^*, \tag{62.13}$$

где

$$t^* = \frac{2v_0}{g} \tag{62.14}$$

продолжительность равноускоренного движения. Время возвращения часов B в точку $x = 0$ равно, согласно (62.12),

$$T = t_2 + \frac{x_1}{v_0} = t_2 + t_1. \tag{62.15}$$

При вычислении интеграла удобнее пользоваться формулой (62.08), так как величина $\frac{1}{2} v_0^2$ в нем постоянна, а разность $2U - 2U_0$ отлична от нуля только в области $(t_1 < t < t_2)$, где справедлива формула (62.11). Элементарные выкладки дают, при помощи (62.14):

$$\tau_A - \tau_B = \frac{v_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{2} T - \frac{2}{3} t^*\right). \tag{62.16}$$

Если бы мы применяли (незаконным образом) формулу (62.01), мы получили бы выражение (62.16) без члена с t^*. Этот член дает поправку на ускоренное движение. Из формулы (62.16) следует, что если продолжительность ускоренного движения равна $^3/_4\ T$, то никакого отставания часов B не получится, а при $t^* = T$ получается даже опережение. Не следует, впрочем, забывать, что формула (62.16) не является общей, а выведена в довольно частных предположениях относительно характера движения.

Вычисления произведены нами в инерциальной системе отсчета, связанной с часами A. Повторять их в координатной системе, связанной с часами B, не имеет смысла, поскольку тогда пришлось бы вычислять те же самые интегралы, только выраженные через другие переменные.