ГЛАВА VI

ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ И ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

§ 63. Уравнения свободного движения материальной точки и их связь с уравнениями тяготения

В предыдущей главе мы уже пользовались предположением, что в заданном поле тяготения материальная точка движется по геодезической линии. Это предположение не является, однако, независимой гипотезой, но может рассматриваться, как следствие из уравнений тяготения, в соединении с предположением о виде тензора массы. Уравнения тяготения используются при этом лишь постольку, поскольку из них вытекают соотношения

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{63.01}$$

выражающие равенство нулю расходимости тензора массы. Уравнения движения материальной точки получаются, путем предельного перехода к случаю сосредоточенной массы, из уравнений движения сплошной среды. При этом тензор массы принимается равным

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\rho^* u^\mu u^\nu, \tag{63.02}$$

где, как и в § 48, ρ^* есть инвариантная плотность массы, а u^ν — четырехмерная скорость. Эти величины связаны уравнением неразрывности

$$\nabla_\nu(\rho^* u^\nu) = 0. \tag{63.03}$$

Мы дадим здесь для уравнений движения материальной точки два вывода: один из них основан на вариационном начале, а другой — на непосредственном использовании уравнений (63.01).

В § 47 мы установили формулу, согласно которой вариация интеграла действия

$$S = \int c^2\rho^*\sqrt{-g}\,(dx) \tag{63.04}$$

равна

$$\delta\int c^2\rho^*\sqrt{-g}\,(dx) = -\int \rho^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx), \tag{63.05}$$

где ξ^σ — вектор бесконечно малого смещения. [Формула (63.04) отличается от (47.46) только обозначением ρ^* для инвариантной плотности]. С другой стороны, если тот же интеграл действия варьировать по величинам $g_{\mu\nu}$, то получится, согласно (48.03),

$$\delta_g \int c^2\rho^* \sqrt{-g}\,(dx) = \frac{1}{2}\int \rho^* u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx). \qquad (63.06)$$

Согласно общей формуле (48.22), это соотношение показывает, что интеграл действия (63.04) действительно соответствует тензору массы (63.02).

В интеграле действия (63.04) мы можем произвести предельный переход, предположив, что инвариантная плотность ρ^* отлична от нуля только в окрестностях одной пространственной точки, причем интеграл от плотности, взятый по объему, окружающему эту точку, имеет конечное значение.

Уравнение неразрывности (63.03) может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,\rho^* u^\nu) = 0. \qquad (63.07)$$

Умножая на $dx_1\,dx_2\,dx_3$, интегрируя по указанному объему и пользуясь тем, что на его границах величина ρ^* равна нулю, получим отсюда

$$\frac{d}{dt}\int \rho^* u^0 \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0 \qquad (63.08)$$

(для наглядности мы пишем t вместо x_0). Следовательно, значение интеграла

$$\int \rho^* u^0 \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = mc \qquad (63.09)$$

есть постоянная, от времени не зависящая. Но величина ρ^* отлична от нуля только в окрестностях одной точки. Поэтому множитель u^0 при ней мы можем вынести за знак интеграла с его значением в этой точке. Это значение равно

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}}, \qquad (63.10)$$

где x_i есть координата материальной точки и $\dot{x}_i$ — производная от нее по времени. Пользуясь этим значением u^0, получаем

$$\int \rho^* \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = m\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}. \qquad (63.11)$$

Интеграл действия S получается отсюда умножением на $c^2\,dt$ и интегрированием по времени. Таким образом,

$$S = mc^2 \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\,dt = mc^2 \int d\tau. \qquad (63.12)$$

Но это выражение только множителем отличается от рассмотренного в § 38 интеграла, вариация которого дает уравнения геодезической линии. Таким образом, вариационное начало

$$\delta S = 0 \tag{63.13}$$

приводит к уравнениям движения свободной материальной точки, совпадающим с уравнениями геодезической линии.

Выведем эти уравнения другим путем, исходя из равенства нулю расходимости тензора массы.

Формула (63.01) может быть подробнее написана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}\,T^{0\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{-g}\,T^{i\nu}) + \sqrt{-g}\,\Gamma^\nu_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0. \tag{63.14}$$

Умножая ее на $dx_1\,dx_2\,dx_3$ и интегрируя по объему, на границах которого тензор $T^{\mu\nu}$ исчезает, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int \sqrt{-g}\,T^{0\nu}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \int \sqrt{-g}\,\Gamma^\nu_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0. \tag{63.15}$$

Сюда мы можем подставить выражения (63.02) для составляющих тензора массы. Предыдущая формула по умножении на c^2 примет вид

$$\frac{d}{dt}\int \rho^* u^0 u^\nu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \\ + \int \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\rho^* u^\alpha u^\beta \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0. \tag{63.16}$$

Интегралы здесь могут быть вычислены при помощи того же приема, как и интеграл (63.11). Мы имеем, вследствие (63.09),

$$\int \rho^* u^0 u^\nu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = mcu^\nu, \tag{63.17}$$

$$\int \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\rho^* u^\alpha u^\beta \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{mc}{u^0}\,\Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \tag{63.18}$$

где все величины взяты в точке, в которой находится частица. Заменяя dt на $u^0\,d\tau$ и сокращая на общий множитель $\frac{mc}{u^0}$, получим из (63.16)

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \tag{63.19}$$

или

$$\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\beta}{d\tau} = 0; \quad \frac{dx_\nu}{d\tau} = u^\nu. \tag{63.20}$$

Это — явная форма уравнений геодезической линии. Мы еще раз убедились, что уравнения свободного движения материальной точки совпадают с уравнениями геодезической линии. Наш вывод показывает, что эти уравнения могут быть получены непосредственно из равенства $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ путем интегрирования по объему и последующего перехода к случаю сосредоточенной массы.

Заметим, что если взять за независимую переменную не собственное время τ, а просто время $t = x_0$, и если умножить предыдущие уравнения на $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$, то они напишутся:

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - \frac{dx_\nu}{dt}\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} = 0. \tag{63.21}$$

Уравнение, соответствующее значению $\nu = 0$, приводится к тождеству.

Стоящая в левой части уравнений движения величина

$$w^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{63.22}$$

представляет, согласно (46.26), контравариантный вектор ускорения частицы.

Выясним, о каком ускорении здесь идет речь. При отсутствии поля тяготения величина w^ν представляла обычное ускорение: в галилеевых координатах пространственные компоненты этого вектора переходили, в нерелятивистском приближении, во вторые производные от декартовых координат частицы по времени. При наличии поля тяготения это будет уже не так. Чтобы выяснить, во что переходят в этом случае величины w^ν в нерелятивистском приближении, можно вычислить приближенные значения скобок Кристоффеля $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, вытекающие из найденных в § 55 значений фундаментального тензора. Соответствующие вычисления удобнее отложить до § 65, а здесь мы приведем готовые результаты. Для величин $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ с нулевым верхним значком получаются значения

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \qquad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63.23}$$

тогда как остальные будут малы. Из величин $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ с пространственным верхним значком наиболее важными будут

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{63.24}$$

Далее, нам нужно иметь приближенные выражения для четырехмерной скорости. Обозначая через

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \tag{63.25}$$

обыкновенную скорость, мы можем приближенно положить

$$u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \cong v_i, \tag{63.26}$$

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \cong 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right). \tag{63.27}$$

Подстановка этих выражений в формулу (63.22) дает

$$w^i \cong \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63.28}$$

$$w^0 \cong \frac{1}{c^2} v_k \left(\frac{dv_k}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) \tag{63.29}$$

(суммирование по k от 1 до 3 здесь подразумевается).

Из этих формул видно, что пространственные компоненты вектора w^ν представляют ускорение частицы *за вычетом ускорения силы тяжести*, а нулевая компонента пропорциональна производимой в единицу времени над частицей работе всех сил *за вычетом силы тяжести*.

Таким образом, при наличии поля тяготения четырехмерный вектор ускорения w^ν соответствует ускорению за вычетом ускорения силы тяжести. Понятно поэтому, что при свободном движении частицы в поле силы тяжести этот вектор равен нулю.

§ 64. Общая постановка задачи о движении системы масс

Общая характеристика интересующей нас задачи была уже дана в § 54. Мы рассматриваем здесь задачу астрономического типа, т. е. задачу о движении небесных тел в свободном пространстве. Как известно из астрономических наблюдений, в мировом пространстве масса распределена далеко не равномерно: подавляющая ее часть сконцентрирована в виде отдельных небесных тел, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Сообразно этому, мы будем считать, что компоненты тензора массы равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых отдельных областей, размеры которых малы по сравнению с их расстояниями; каждая такая область соответствует небесному телу.

Внутри каждого тела тензор массы должен, во-первых, соответствовать принятой физической модели этого тела (газ, жидкость, упругое тело и т. п.) и, во-вторых, должен удовлетворять условию

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{64.01}$$

выражающему равенство нулю его расходимости. Соответствие физической модели означает, что компоненты тензора массы определенным образом выражаются через функции состояния физической системы, образующей данное тело [плотность, скорость, давление и другие величины, см., например, (55.02)].

Кроме физических свойств данного тела, вид тензора массы, как и всякого тензора, будет зависеть также от метрики. Помимо функций состояния в собственном смысле, компоненты тензора массы будут поэтому содержать также фундаментальный тензор. Фундаментальный