Подстановка этих выражений в формулу (63.22) дает

$$w^i \cong \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63.28}$$

$$w^0 \cong \frac{1}{c^2} v_k \left(\frac{dv_k}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) \tag{63.29}$$

(суммирование по k от 1 до 3 здесь подразумевается).

Из этих формул видно, что пространственные компоненты вектора w^ν представляют ускорение частицы *за вычетом ускорения силы тяжести*, а нулевая компонента пропорциональна производимой в единицу времени над частицей работе всех сил *за вычетом силы тяжести*.

Таким образом, при наличии поля тяготения четырехмерный вектор ускорения w^ν соответствует ускорению за вычетом ускорения силы тяжести. Понятно поэтому, что при свободном движении частицы в поле силы тяжести этот вектор равен нулю.

§ 64. Общая постановка задачи о движении системы масс

Общая характеристика интересующей нас задачи была уже дана в § 54. Мы рассматриваем здесь задачу астрономического типа, т. е. задачу о движении небесных тел в свободном пространстве. Как известно из астрономических наблюдений, в мировом пространстве масса распределена далеко не равномерно: подавляющая ее часть сконцентрирована в виде отдельных небесных тел, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Сообразно этому, мы будем считать, что компоненты тензора массы равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых отдельных областей, размеры которых малы по сравнению с их расстояниями; каждая такая область соответствует небесному телу.

Внутри каждого тела тензор массы должен, во-первых, соответствовать принятой физической модели этого тела (газ, жидкость, упругое тело и т. п.) и, во-вторых, должен удовлетворять условию

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{64.01}$$

выражающему равенство нулю его расходимости. Соответствие физической модели означает, что компоненты тензора массы определенным образом выражаются через функции состояния физической системы, образующей данное тело [плотность, скорость, давление и другие величины, см., например, (55.02)].

Кроме физических свойств данного тела, вид тензора массы, как и всякого тензора, будет зависеть также от метрики. Помимо функций состояния в собственном смысле, компоненты тензора массы будут поэтому содержать также фундаментальный тензор. Фундаментальный тензор и его производные входят также в выражение (64.01) для расходимости.

Таким образом, для того чтобы написать тензор массы, уже нужно знать метрику. Но метрика определяется из уравнений Эйнштейна, в правой части которых стоит тензор массы. Отсюда ясно, что определение тензора массы и фундаментального тензора может быть произведено только совместно.

Сравним рассматриваемую здесь задачу с теми, какие встречаются в теории тяготения Ньютона. Там обычно задача ставится так, что плотность масс предполагается известной, а по ней определяется потенциал тяготения. Но в ньютоновой теории есть и другие, более сложные задачи, в которых потенциал должен определяться одновременно с плотностью. Такова, например, знаменитая задача о фигурах равновесия вращающейся жидкости — задача, которой занимались у нас Ляпунов, а за границей Джинс и Пуанкаре, и строгое решение которой было дано Ляпуновым в его посмертном мемуаре [21, 22]. Занимающая нас задача эйнштейновой теории напоминает по своему характеру задачу Ляпунова, только вместо двух скалярных величин (ньютонова потенциала и плотности) определению теперь подлежат два тензора: фундаментальный тензор и тензор массы. Кроме того, в нашем случае речь идет не о равновесии, а о движении. Заметим, что основное уравнение задачи Ляпунова встретится и у нас (§ 73).

Наша задача облегчается, прежде всего, тем, что метрика всюду мало отличается от евклидовой; о малости отклонений дает представление табличка, приведенная в § 58. Другим упрощающим обстоятельством является то, что на сколько-нибудь значительном расстоянии от каждого тела метрика зависит не от деталей его внутренней структуры, а от некоторых его суммарных характеристик. Таковыми являются: полная масса данного тела, его моменты инерции, положение и скорость его центра тяжести и другие. От этих величин зависит и ньютонов потенциал тела.

Для решения уравнений Эйнштейна мы будем пользоваться приближенным методом, который представляет развитие способа вычислений, примененного в § 55. Этот способ основан на разложении всех искомых функций по обратным степеням скорости света. Такому формальному разложению соответствует фактически разложение по степеням некоторых безразмерных величин. Таковыми являются величины U/c^2 и v^2/c^2, где U — ньютонов потенциал, а v^2 — квадрат некоторой скорости (скорости одного из тел). Для систем, к которым применима теорема вириала, обе эти величины (U и v^2) будут одного порядка, скажем, порядка q^2, где q — некоторый параметр, имеющий размерность скорости (этим параметром мы уже пользовались в §§ 55 и 58). В качестве безразмерного параметра, по которому ведется разложение, можно тогда взять величину q^2/c^2.

Решая волновое уравнение путем введения поправок на запаздывание, мы тем самым предполагаем, что размеры системы малы по сравнению с длиной излучаемых волн (в данном случае, гравитационных). Это предположение не является независимым от предыдущих. В самом деле, обозначив через ω угловую частоту обращения планеты и через R радиус ее орбиты, мы можем написать условие малости размеров системы в виде $R \ll c/\omega$, так как c/ω есть деленная на 2π длина гравитационной волны. С другой стороны, условие малости скорости планеты $v = R\omega$ по сравнению со скоростью света напишется в виде $R\omega \ll c$, а это неравенство совпадает с предыдущим.

Как мы уже отмечали в конце § 54, нас интересуют „квази-стационарные“ состояния гравитационного поля, т. е. такие, которые устанавливаются после многих обращений планет. Решения волнового уравнения, получаемые путем введения поправок на запаздывание, условию квази-стационарности удовлетворяют.

Мы уже упоминали о том, что в большинстве астрономических задач расстояния между небесными телами весьма велики по сравнению с их линейными размерами. Если R есть длина, характеризующая порядок величины расстояний, а L — длина, характеризующая линейные размеры тел, то имеет место неравенство

$$L \ll R. \tag{64.02}$$

Использование этого неравенства вносит значительные упрощения в вычисление потенциала тяготения, а также фундаментального тензора, вне масс: как мы уже говорили, эти величины не будут тогда зависеть от деталей внутренней структуры тел. Поэтому мы будем пользоваться также и неравенством (64.02), хотя оно является менее существенным, чем неравенства $v^2 \ll c^2$ и $U \ll c^2$, на которых основан наш метод решения уравнений Эйнштейна.

Заметим, что на поверхности и внутри тела, где потенциал тяготения наибольший, будет, по порядку величины,

$$U/c^2 = \alpha/L, \tag{64.03}$$

где α — гравитационный радиус тела (см. табличку в § 58). Поэтому оба используемых неравенства можно записать в виде

$$\alpha \ll L \ll R. \tag{64.04}$$

Наша задача состоит в определении фундаментального тензора и тензора массы. Зная компоненты тензора массы в функции координат и времени, мы тем самым будем знать и движение массы, так как массы занимают области, в которых тензор массы отличен от нуля. Существенно отметить, что движение этих областей не может быть предписано наперед; закон движения вытекает из самих уравнений тяготения.

В результате решения нашей задачи мы, во-первых, получим для тензора массы и для фундаментального тензора приближенные выражения, которые будут содержать некоторые неизвестные функции. Во-вторых, мы получим для этих неизвестных функций уравнения, которые позволяют их определить из начальных условий (уравнения движения).

Выбор упомянутых здесь неизвестных функций подсказывается ходом решения задачи. Естественным образом входят в решение те величины, которые применяются уже в ньютоновой механике. Таковы, например, координаты центра тяжести каждого из тел, его полная масса, момент количества движения, моменты инерции и другие интегральные характеристики тела.

Для всех этих величин получаются уравнения движения, которые в первом приближении совпадают с ньютоновыми, а в следующем приближении отличаются от ньютоновых малыми поправками. Для нас представляют интерес как эти поправки, так и выражения для фундаментального тензора и для других величин эйнштейновской теории через ньютоновы величины.

§ 65. Расходимость тензора массы во втором приближении

Задачу совместного определения тензора массы и фундаментального тензора мы будем решать последовательными этапами, исходя из рассуждений § 55. Напомним ход этих рассуждений. В исходном приближении метрика принималась евклидовой, что соответствует полному пренебрежению силами тяготения. В этом приближении можно было наперед указать лишь компоненты T^{00} и T^{0i} тензора массы. Согласно формуле (55.03), в галилеевых координатах эти компоненты равны

$$T^{00} = \frac{1}{c^2}\rho; \quad T^{0i} = \frac{1}{c^2}\rho v_i, \tag{65.01}$$

где ρ — плотность и v_i — скорость вещества в данной точке, причем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{65.02}$$

Пространственные компоненты (T^{ik}) в этом приближении не определялись; предполагалось только, что их порядок величины такой же, как в отсутствии сил тяготения.

Этих предположений относительно тензора массы оказалось достаточно, чтобы определить метрику в первом приближении. Согласно формулам (55.31), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2}U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{65.03}$$