ции. Во-вторых, мы получим для этих неизвестных функций уравнения, которые позволяют их определить из начальных условий (уравнения движения).

Выбор упомянутых здесь неизвестных функций подсказывается ходом решения задачи. Естественным образом входят в решение те величины, которые применяются уже в ньютоновой механике. Таковы, например, координаты центра тяжести каждого из тел, его полная масса, момент количества движения, моменты инерции и другие интегральные характеристики тела.

Для всех этих величин получаются уравнения движения, которые в первом приближении совпадают с ньютоновыми, а в следующем приближении отличаются от ньютоновых малыми поправками. Для нас представляют интерес как эти поправки, так и выражения для фундаментального тензора и для других величин эйнштейновской теории через ньютоновы величины.

§ 65. Расходимость тензора массы во втором приближении

Задачу совместного определения тензора массы и фундаментального тензора мы будем решать последовательными этапами, исходя из рассуждений § 55. Напомним ход этих рассуждений. В исходном приближении метрика принималась евклидовой, что соответствует полному пренебрежению силами тяготения. В этом приближении можно было наперед указать лишь компоненты T^{00} и T^{0i} тензора массы. Согласно формуле (55.03), в галилеевых координатах эти компоненты равны

$$T^{00} = \frac{1}{c^2}\rho; \quad T^{0i} = \frac{1}{c^2}\rho v_i, \tag{65.01}$$

где ρ — плотность и v_i — скорость вещества в данной точке, причем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{65.02}$$

Пространственные компоненты (T^{ik}) в этом приближении не определялись; предполагалось только, что их порядок величины такой же, как в отсутствии сил тяготения.

Этих предположений относительно тензора массы оказалось достаточно, чтобы определить метрику в первом приближении. Согласно формулам (55.31), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2}U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{65.03}$$

где U — ньютонов потенциал тяготения, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{65.04}$$

а U_i — вектор-потенциал тяготения, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i. \tag{65.05}$$

Следует помнить, что потенциалы U и U_i связаны с плотностью массы ρ и потока массы ρv_i не-локальным образом: значения потенциалов внутри данного тела зависят от распределения плотности во всем пространстве, а не только внутри того же тела.

В § 55 приведены также формулы для контравариантных компонент фундаментального тензора, а именно:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{65.06}$$

При этом, согласно (55.37),

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \tag{65.07}$$

Знание метрики в том приближении, какое дается предыдущими формулами, позволяет сделать следующий шаг в построении тензора массы. Для этого мы должны прежде всего более точно написать выражение для его расходимости, что и будет задачей этого параграфа.

Согласно формуле (41.24), общее выражение для расходимости симметричного тензора имеет вид

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + y_\nu T^{\mu\nu}, \tag{65.08}$$

где для краткости положено

$$y_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\lg \sqrt{-g}) = \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}. \tag{65.09}$$

Порядок величины составляющих тензора массы, во всяком случае, правильно дается формулами (55.02). Мы будем иметь

$$T^{00} = O\left(\frac{\rho}{c^2}\right); \quad T^{0i} = O\left(\frac{\rho}{c^2} q\right); \quad T^{ik} = O\left(\frac{\rho}{c^2} q^2\right), \tag{65.10}$$

где q есть уже применявшийся нами параметр, характеризующий порядок величины скорости.

Рассмотрим нулевую компоненту расходимости тензора массы. Она дается выражением (65.08) при $\mu = 0$. В исходном приближении мы пренебрегали здесь всеми членами, кроме производных. Чтобы сделать следующий шаг, мы должны знать величины $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ и y_ν с точностью до членов порядка $1/c^2$ включительно. Что касается пространственных компонент расходимости, то в исходном приближении мы ими пренебрегали вовсе. Чтобы учесть их хотя бы в первом приближении, мы должны теперь найти в $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ главный член, не содержащий множителя $1/c^2$. Для определения y_ν, $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ и $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ с указанной точностью достаточно приближения, даваемого формулами (65.03)—(65.07).

Из формул (65.07) и (65.09) получаем без труда

$$y_0 = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad y_i = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.11}$$

Вычисляя, далее, скобки Кристоффеля по известным формулам

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}, \tag{65.12}$$

где

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right), \tag{65.13}$$

легко убеждаемся, что в последней формуле, в данном приближении, всеми членами, содержащими множитель $1/c^2$, можно пренебречь, после чего останется

$$\Gamma_{0,00} = -\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma_{0,0i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{65.14}$$

а также

$$\Gamma_{i,00} = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.15}$$

Отсюда для $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ получаем:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{65.16}$$

тогда как величины Γ^0_{ik} будут более высокого порядка малости, а именно

$$\Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{65.17}$$

Из скобок Кристоффеля с пространственным верхним значком главными будут

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.18}$$

Что касается остальных, то они будут малыми величинами, а именно

$$\Gamma^i_{0k} = O\left(\frac{1}{c^2}\right); \quad \Gamma^i_{kl} = O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{65.19}$$

Найденные значения скобок Кристоффеля позволяют нам написать выражение для расходимости тензора массы.

Формулу (65.08) для $\mu=0$ можно написать подробнее в виде

$$\nabla_\nu T^{0\nu}=\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i}+(\Gamma^0_{00}+y_0)\,T^{00}+ + (2\Gamma^0_{0i}+y_i)\,T^{0i}+\Gamma^0_{ik}T^{ik}. \tag{65.20}$$

Здесь, согласно (65.11) и (65.16), коэффициент при T^{00} равен

$$\Gamma^0_{00}+y_0=\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{65.21}$$

Что касается коэффициента при T^{0i}, то он оказывается исчезающе малым, а именно

$$2\Gamma^0_{0i}+y_i=O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{65.22}$$

Согласно (65.17), того же порядка будет и коэффициент при T^{ik}.

Таким образом, в нашем приближении формула (65.20) принимает вид:

$$\nabla_\nu T^{0\nu}=\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\,T^{00}. \tag{65.23}$$

Для пространственных компонент расходимости мы получаем из (65.08) при $\mu=i$

$$\nabla_\nu T^{i\nu}=\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}+\Gamma^i_{00}T^{00}+ + 2\Gamma^i_{0k}T^{0k}+y_0T^{0i}+\Gamma^i_{kl}T^{kl}+y_kT^{ik}. \tag{65.24}$$

Как видно из приведенных выше оценок, здесь все коэффициенты во второй строке будут содержать множитель $1/c^2$, так что члены во второй строке можно отбросить. Заменяя Γ^0_{00} его выражением (65.18), мы получим тогда

$$\nabla_\nu T^{i\nu}=\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\,T^{00}. \tag{65.25}$$

Таким образом, учитывая отклонения метрики от евклидовой, или, что то же, учитывая силы тяготения (то и другое в первом приближении), мы должны писать условие равенства нулю расходимости тензора массы в виде уравнений:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\,T^{00}=0, \tag{65.26}$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\,T^{00}=0. \tag{65.27}$$

§ 66. Приближенный вид тензора массы для упругого тела при учете поля тяготения

Приближенные выражения для тензора массы упругого тела, без учета сил тяготения, были получены нами в § 32 из рассмотрения скаляра и вектора Умова (плотности и потока энергии). В принятых