Формулу (65.08) для $\mu=0$ можно написать подробнее в виде

$$\nabla_\nu T^{0\nu}=\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i}+(\Gamma^0_{00}+y_0)\,T^{00}+ \\ +(2\Gamma^0_{0i}+y_i)\,T^{0i}+\Gamma^0_{ik}T^{ik}. \qquad (65.20)$$

Здесь, согласно (65.11) и (65.16), коэффициент при T^{00} равен

$$\Gamma^0_{00}+y_0=\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (65.21)$$

Что касается коэффициента при T^{0i}, то он оказывается исчезающе малым, а именно

$$2\Gamma^0_{0i}+y_i=O\left(\frac{1}{c^4}\right). \qquad (65.22)$$

Согласно (65.17), того же порядка будет и коэффициент при T^{ik}.

Таким образом, в нашем приближении формула (65.20) принимает вид:

$$\nabla_\nu T^{0\nu}=\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\,T^{00}. \qquad (65.23)$$

Для пространственных компонент расходимости мы получаем из (65.08) при $\mu=i$

$$\nabla_\nu T^{i\nu}=\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}+\Gamma^i_{00}T^{00}+ \\ +2\Gamma^i_{0k}T^{0k}+y_0T^{0i}+\Gamma^i_{kl}T^{kl}+y_kT^{ik}. \qquad (65.24)$$

Как видно из приведенных выше оценок, здесь все коэффициенты во второй строке будут содержать множитель $1/c^2$, так что члены во второй строке можно отбросить. Заменяя Γ^i_{00} его выражением (65.18), мы получим тогда

$$\nabla_\nu T^{i\nu}=\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\,T^{00}. \qquad (65.25)$$

Таким образом, учитывая отклонения метрики от евклидовой, или, что то же, учитывая силы тяготения (то и другое в первом приближении), мы должны писать условие равенства нулю расходимости тензора массы в виде уравнений:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\,T^{00}=0, \qquad (65.26)$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\,T^{00}=0. \qquad (65.27)$$

§ 66. Приближенный вид тензора массы для упругого тела при учете поля тяготения

Приближенные выражения для тензора массы упругого тела, без учета сил тяготения, были получены нами в § 32 из рассмотрения скаляра и вектора Умова (плотности и потока энергии). В принятых нами теперь обозначениях (в которых $x_0 = t$) эти выражения были затем выписаны в § 55. Согласно формуле (55.02), они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi\right)\right\}, \\ c^2T^{0i} &= \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi\right)\right\} - \frac{1}{c^2}p_{ik}v_k, \\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \quad (66.01)$$

Напомним, что здесь p_{ik} есть трехмерный тензор упругих напряжений, а Π — упругая энергия единицы массы тела. Эти величины удовлетворяют, согласно (30.08), соотношению

$$\rho\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2}p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \quad (66.02)$$

Нам надлежит теперь обобщить выражения для тензора массы, приняв во внимание поле тяготения. По теории Ньютона, взятый с обратным знаком ньютонов потенциал есть в то же время потенциальная энергия частицы единичной массы, находящейся в данном поле тяготения. Поэтому следует ожидать, что надлежащие выражения для плотности и потока энергии получатся, если в формулах (30.14) и (30.15) для скаляра и вектора Умова добавить члены $(-\rho U)$ и $(-\rho v_i U)$. Это дает

$$S = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(\Pi - U), \quad (66.03)$$

$$S_i = v_i\left\{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(\Pi - U)\right\} - p_{ik}v_k. \quad (66.04)$$

Компоненты T^{00} и T^{0i} тензора массы получатся по формулам:

$$c^2T^{00} = \rho + \frac{1}{c^2}S, \quad (66.05)$$

$$c^2T^{0i} = \rho v_i + \frac{1}{c^2}S_i. \quad (66.06)$$

Окончательно мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2T^{0i} &= \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2}p_{ik}v_k, \\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \quad (66.07)$$

Если наши рассуждения верны, то эти выражения должны, в требуемом приближении, удовлетворять выведенным в конце предыдущего параграфа уравнениям, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00}=0, \\ &\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}T^{00}=0. \end{aligned}\right\} \tag{66.08}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться в силу уравнений движения для величин, входящих в тензор массы. Мы имеем, во-первых, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0 \tag{66.09}$$

и, во-вторых, уравнения движения упругого тела в поле тяготения с ускорением $\frac{\partial U}{\partial x_i}$:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{66.10}$$

Кроме того, имеет место соотношение (66.02) между тензором напряжений и упругой потенциальной энергией. Используя (66.09), (66.10) и (66.02), получаем для скаляра и вектора Умова соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S_i}{\partial x_i}=-\rho\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{66.11}$$

откуда, после применения (66.09),

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}=-\frac{1}{c^4}\rho\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{66.12}$$

Вследствие того, что приближенно $\rho=c^2T^{00}$, уравнение (66.12) в должном приближении совпадает с первым из уравнений (66.08). Что касается остальных уравнений (66.08), то, по умножении на c^2, они приближенно совпадут с уравнениями движения (66.10), написанными в форме

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=0 \tag{66.13}$$

(в выражениях T^{i0} и T^{00} здесь достаточно взять главные члены).

Таким образом, уравнения (66.08), выражающие равенство нулю расходимости тензора массы с учетом неевклидовости, действительно будут приближенно выполнены, если взять в качестве тензора массы величины (66.07).

В формулах (66.07) плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (66.09). Соответствующее общековариантное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sqrt{-g}\,\rho^* u^\alpha)=0, \tag{66.14}$$

где ρ^* — инвариантная плотность и u^α — четырехмерная скорость. Чтобы оба выражения [(66.09) и (66.14)] совпадали, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^0, \\ \rho v_i &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^i \end{aligned}\right\} \tag{66.15}$$

(множитель $\frac{1}{c}$ добавлен для того, чтобы ρ^* приближенно равнялось ρ). Имея в виду, что, согласно (65.07) и (63.27),

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g} = 1 + \frac{2U}{c^2}; \quad u^0 = 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right), \tag{66.16}$$

мы получим приближенно

$$\rho^* = \rho\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3U\right)\right\}. \tag{66.17}$$

Формулы (66.07) позволяют написать выражение для инварианта тензора массы. Вводя давление p по формуле

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}), \tag{66.18}$$

мы будем иметь

$$T = \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2 + \Pi - 3U\right)\right\} - \frac{3}{c^2}p \tag{66.19}$$

и, используя формулу (66.17) для ρ^*,

$$T = \rho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3}{c^2}p. \tag{66.20}$$

Последнее выражение совпадает с (32.30).

§ 67. Приближенные выражения для скобок Кристоффеля и для некоторых других величин

Для того чтобы сделать следующий шаг в определении фундаментального тензора, мы должны продолжить вычисления § 55. Так как мы ведем все наши вычисления в гармонических координатах, удобно рассматривать в качестве неизвестных функций умноженные на $\sqrt{-g}$ контравариантные компоненты фундаментального тензора, т. е. величины

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{67.01}$$

Удобство применения этих величин состоит в том, что выраженное через них условие гармоничности (55.39) принимает простой вид:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{67.02}$$