где ρ^* — инвариантная плотность и u^α — четырехмерная скорость. Чтобы оба выражения [(66.09) и (66.14)] совпадали, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^0, \\ \rho v_i &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^i \end{aligned}\right\} \tag{66.15}$$

(множитель $\frac{1}{c}$ добавлен для того, чтобы ρ^* приближенно равнялось ρ). Имея в виду, что, согласно (65.07) и (63.27),

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g} = 1 + \frac{2U}{c^2}; \quad u^0 = 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right), \tag{66.16}$$

мы получим приближенно

$$\rho^* = \rho\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3U\right)\right\}. \tag{66.17}$$

Формулы (66.07) позволяют написать выражение для инварианта тензора массы. Вводя давление p по формуле

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}), \tag{66.18}$$

мы будем иметь

$$T = \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2 + \Pi - 3U\right)\right\} - \frac{3}{c^2}p \tag{66.19}$$

и, используя формулу (66.17) для ρ^*,

$$T = \rho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3}{c^2}p. \tag{66.20}$$

Последнее выражение совпадает с (32.30).

§ 67. Приближенные выражения для скобок Кристоффеля и для некоторых других величин

Для того чтобы сделать следующий шаг в определении фундаментального тензора, мы должны продолжить вычисления § 55. Так как мы ведем все наши вычисления в гармонических координатах, удобно рассматривать в качестве неизвестных функций умноженные на $\sqrt{-g}$ контравариантные компоненты фундаментального тензора, т. е. величины

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{67.01}$$

Удобство применения этих величин состоит в том, что выраженное через них условие гармоничности (55.39) принимает простой вид:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{67.02}$$

так что оно является *линейным* относительно неизвестных функций. Дальнейшим преимуществом такого выбора неизвестных функций является то, что пространственные компоненты $\mathfrak{g}^{ik}$ весьма мало отличаются от постоянных. Наконец, весьма удобным является то обстоятельство, что в левую часть каждого из уравнений тяготения входит оператор Даламбера от соответственной компоненты $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$; таким образом, каждая компонента $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в основном связана только с одной (одноименной) компонентой тензора массы.

В § 55 мы нашли для величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ приближенные выражения [формулы (55.38)]:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3} U_i \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{67.03}$$

где U — ньютонов потенциал, а U_i — вектор-потенциал тяготения. Мы уточним теперь эти выражения, выписав дальнейшие члены разложения по обратным степеням скорости света. Положим

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{4S_{ik}}{c^3}. \end{aligned}\right\} \tag{67.04}$$

При помощи этих выражений мы можем вычислять скобки Кристоффеля и другие величины, входящие в уравнения тяготения.

Начнем с вычисления определителя g. Как легко проверить [см. формулу (Б.67)], этот определитель равен определителю из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Формулы (67.04) дают

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{4S - 4S_{kk}}{c^4}\right). \tag{67.05}$$

Здесь мы положили, в соответствии с принятым условием для суммирования по пространственным значкам,

$$S_{kk} = \sum_{k=1}^{3} S_{kk} = S_{11} + S_{22} + S_{33}. \tag{67.06}$$

Извлекая квадратный корень, получим также

$$\sqrt{-g} = c\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2S - 2S_{kk} - 2U^2}{c^4}\right). \tag{67.07}$$

Введем особое обозначение для корня четвертой степени

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}} = f. \tag{67.08}$$

Согласно (67.06), эта величина равна

$$f = 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{c^4}\left(S - S_{kk} - \frac{3}{2}U^2\right). \tag{67.09}$$

Величина f приближенно удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, которое будет выведено в следующем параграфе.

Из (67.04) и (67.07) получаем для c^2g^{00} выражение

$$c^2g^{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2S + 2S_{kk} - 2U^2}{c^4}. \tag{67.10}$$

Если мы положим

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2), \tag{67.11}$$

мы будем иметь с той же точностью

$$c^2g^{00} = \frac{c^2 + U^*}{c^2 - U^*}, \tag{67.12}$$

а также

$$\frac{1}{c^2}g_{00} = \frac{c^2 - U^*}{c^2 + U^*}. \tag{67.13}$$

Величина U^* встретится нам в дальнейшем.

Переходим к вычислению введенных в Добавлении Б величин

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\rho} + \mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\rho} - \mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right), \tag{67.14}$$

связанных со скобками Кристоффеля. Используя выражения (67.04) и (67.05), получаем следующую таблицу:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi^{0,00} &= -\frac{2}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t},\\
\Pi^{0,0l} &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_l},\\
\Pi^{0,kl} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{67.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Pi^{i,00} &= -\frac{2}{c^4}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 4U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\},\\
\Pi^{i,k0} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right),\\
\Pi^{i,kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{67.16}$$

Отсюда, спуская второй и третий верхние значки, получаем величины $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Pi^0_{00} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \\ \Pi^0_{0l} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\ \Pi^0_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (67.17)$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi^i_{00} &= -2\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\}, \\ \Pi^i_{k0} &= -\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Pi^i_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (67.18)$$

При вычислении Π^i_{00} потребовалось значение $g_{00} = c^2 - 2U$; при вычислении остальных величин достаточно было галилеевых значений фундаментального тензора. В формулах для $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$ мы ограничились членами порядка $1/c^2$.

Для вычисления скобок Кристоффеля необходимо знать, помимо величин $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$, также величины $\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}$, определяемые, согласно формуле

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(y_\alpha\delta^{\mu}_{\beta} + y_\beta\delta^{\mu}_{\alpha} - y^{\mu}g_{\alpha\beta}\right), \qquad (67.19)$$

где

$$y_\alpha = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \quad y^{\mu} = g^{\mu\alpha}y_\alpha \qquad (67.20)$$

[см. Добавление Б]. Выпишем приближенные значения величин y_α. Дифференцируя (67.05), получаем

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 4U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y_0 &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - 4U\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial t}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (67.21)$$

Для величин y^{μ} с верхними значками получаем, ограничиваясь членами порядка не выше $1/c^4$, следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} y^i &= -\frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 6U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y^0 &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (67.22)$$

Скобки Кристоффеля выражаются через вычисленные величины по формуле

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\mu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}. \qquad (67.23)$$

Если ограничиться членами порядка не выше $1/c^2$, то при $\mu = 0$ мы будем иметь, как и в приближении (65.16),

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{67.24}$$

тогда как при $\mu = i$ мы получаем более точные [сравнительно с (65.18) и (65.19)] выражения:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\frac{\partial U_i}{\partial t}\right), \\ \Gamma^i_{0k} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Gamma^i_{kl} &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_l}\delta_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_k}\delta_{il} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67.25}$$

В приближенных вычислениях удобно пользоваться формулами, преобразованными к такому виду, чтобы в них входили величины $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$, а не $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Преимущество первых величин перед последними видно из сравнения формул (67.18) с формулами (67.25). Эти формулы показывают, что величинами Π^i_{kl} можно пренебрегать, тогда как величины Γ^i_{kl} приходится учитывать.

В Добавлении Б получена для тензора Эйнштейна формула, преобразованная к указанному виду, а именно формула (Б.87). Эта формула содержит функцию Лагранжа, которая, согласно (Б.95), равна

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}y_\nu y^\nu. \tag{67.26}$$

Найдем приближенное значение этого выражения. Из формул (67.21) и (67.22) получаем

$$\sqrt{-g}\,y_\alpha y^\alpha = \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(S - S_{kk})}{\partial x_i}\right)^2. \tag{67.27}$$

С другой стороны, формулы (67.17) и (67.18) в соединении с исходными выражениями (67.04) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ дают:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Pi^\rho_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} = \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} &+ \\ + \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 &- \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67.28}$$

Складывая с этим равенством деленное на 2 предыдущее равенство, получаем для умноженной на $\sqrt{-g}$ функции Лагранжа выражение:

$$\begin{aligned} L\sqrt{-g} = \frac{2}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right] &+ \\ + \frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} &- \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67.29}$$

Вводя по формуле (67.11) величину U^*, можно предыдущее выражение написать в виде

$$L\sqrt{-g}=\frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)^2+\frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2+\frac{16}{c^5}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t}-\frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{67.30}$$

В поправочных членах мы заменили здесь U на U^*. Последняя формула замечательна тем, что правая часть ее представляет однородную квадратичную функцию, с *постоянными* коэффициентами, от первых производных *четырех* величин U^* и U_i.

Из сравнения формул (67.27) и (67.29) видно, что сумма

$$\sqrt{-g}\left(L+\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha\right)=\frac{8}{c^5}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right\} \tag{67.31}$$

будет более высокого порядка малости, чем величины (67.27) и (67.29) в отдельности. Это замечание позволяет найти весьма простое выражение для инварианта кривизны R. Согласно формуле (Б.49), мы имеем, в гармонических координатах

$$R=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-L. \tag{67.32}$$

Пользуясь обозначением (67.08), можем написать

$$\sqrt{-g}=c\cdot f^2, \tag{67.33}$$

после чего получим

$$R=\frac{2}{f}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\frac{2}{f^2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}-L. \tag{67.34}$$

Но мы имеем

$$y_\alpha=\frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}. \tag{67.35}$$

Поэтому

$$R=\frac{2}{cf^3}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\left(\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha+L\right). \tag{67.36}$$

Перейдем теперь к приближенным формулам. Согласно (67.31), величина $\left(\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha+L\right)$ будет шестого порядка относительно $1/c$. Отбрасывая величины шестого порядка, мы можем заменить величины $\mathfrak{g}^{\beta\alpha}$ их галилеевыми значениями. Это дает для инварианта кривизны R весьма простое приближенное выражение

$$R=\frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\Delta f\right), \tag{67.37}$$

где Δ — оператор Лапласа с евклидовыми коэффициентами.