§ 68. Приближенная форма уравнений тяготения

Вычисления предыдущего параграфа позволяют нам написать левую часть уравнений тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{68.01}$$

в том приближении, какое соответствует принятой точности. Выпишем сперва значение левой части без пренебрежений. Согласно формуле (Б.87), мы имеем

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2g} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Pi^{\mu,\alpha\beta} \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu + \\ + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} L + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} B - B^{\mu\nu}. \tag{68.02}$$

Здесь L есть функция Лагранжа:

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} y_\nu y^\nu, \tag{68.03}$$

уже встречавшаяся в предыдущем параграфе. Величины $B^{\mu\nu}$, согласно (Б.85), определены формулами

$$B^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (y^\mu \Gamma^\nu + y^\nu \Gamma^\mu) = \\ = \frac{1}{2} (\nabla^\mu + y^\mu) \Gamma^\nu + \frac{1}{2} (\nabla^\nu + y^\nu) \Gamma^\mu, \tag{68.04}$$

где Γ^ν — введенные в § 41 и в § 53 величины:

$$\Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}. \tag{68.05}$$

Величина B есть составленный из $B^{\mu\nu}$ „квази-инвариант"

$$B = g_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = (\nabla_\nu + y_\nu) \Gamma^\nu \tag{68.06}$$

(это не есть настоящий инвариант, поскольку $B^{\mu\nu}$ не есть тензор).

В гармонической системе координат величины Γ^ν, а следовательно, и $\Gamma^{\mu\nu}$, а также $B^{\mu\nu}$ и B, исчезают.

Заметим, что пока в левой части уравнений Эйнштейна (68.01) стоит полное выражение (68.02) для консервативного тензора, равенство

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{68.07}$$

представляет следствие самих уравнений. Если же мы в консервативном тензоре с самого начала не будем писать членов $B^{\mu\nu}$ и B, то равенство (68.07) будет выполняться лишь поскольку выполняется условие $\Gamma^{\nu} = 0$.

Переходя к приближенной форме уравнений Эйнштейна, рассмотрим сперва члены с вторыми производными. Используя выражения (67.04), мы будем иметь:

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = -c\,\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{4}{c^3}\left(S_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2U_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial t} + U\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right). \tag{68.08}$$

Здесь главные члены дают умноженный на c евклидов оператор Даламбера, тогда как члены с переменными коэффициентами представляют поправки, которыми, в рассматриваемом приближении, можно пренебречь. Рассмотрим подробнее порядок величины этих поправок. В выражение (68.02) для тензора Эйнштейна входит величина (68.08), деленная на $2g$, причем φ есть соответствующая компонента $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Производные от φ будут третьего порядка, а так как приближенно $g = -c^2$, то деленные на $2g$ поправочные члены в (68.08) будут восьмого порядка относительно $1/c$. Пренебрегая величинами такого порядка, мы должны вычислять и все другие входящие в (68.02) величины с соответствующей точностью.

Чтобы освободиться от величины g в знаменателе, мы будем вычислять не самый тензор Эйнштейна, а этот тензор, умноженный на близкий к единице множитель $(-g/c^2)$. Члены со вторыми производными будут тогда, с требуемой точностью,

$$-\frac{1}{2c^2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = \frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2}. \tag{68.09}$$

Чтобы получить члены с первыми производными, мы найдем сперва при помощи формул (67.15)—(67.18) величины:

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^0_{\alpha\beta} = -\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.10}$$

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^i_{\alpha\beta} = \frac{4}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68.11}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{i,\alpha\beta}\Pi^k_{\alpha\beta} &= \\ = \frac{4}{c^4}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)&\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right) - \\ &- \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right).\end{aligned} \tag{68.12}$$

В формулах (68.10) и (68.11) можно было бы не писать множителей $(-g/c^2)$, так как в данном приближении их можно заменить на единицу.

Используя, далее, выражения (67.22) для y^α и вводя обозначение

$$N^{\mu\nu}=\left(-\frac{g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L\right\}, \tag{68.13}$$

мы получим

$$N^{00}=-\frac{7}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.14}$$

$$N^{0i}=\frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68.15}$$

$$N^{ik}=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_k}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right)-$$
$$-\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\sqrt{-g}}{c}L, \tag{68.16}$$

где

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}L=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_s}\right)^2+\frac{6}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\frac{16}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_s}\frac{\partial U_s}{\partial t}-$$
$$-\frac{4}{c^6}\left(\frac{\partial U_s}{\partial x_r}-\frac{\partial U_r}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.17}$$

и U^* имеет значение (67.11). Поскольку величина U входит здесь в члены шестого порядка, мы можем заменить ее на U^*, как это сделано в (67.30). Тогда все величины $N^{\mu\nu}$ будут содержать первые производные только от четырех величин U^*, U_s, причем все $N^{\mu\nu}$ будут однородными квадратичными функциями от первых производных с *постоянными* коэффициентами. Это представляет весьма большое упрощение точных формул (68.13).

При помощи найденных выражений мы можем сразу написать приближенные уравнения Эйнштейна Мы будем иметь:

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=$$
$$=\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2}+N^{\mu\nu}=\frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{68.18}$$

где величины $N^{\mu\nu}$ имеют значения (68.14)—(68.16).

Чтобы применять формулу (68.18) к определению величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, нужно прежде всего иметь значения входящих в $N^{\mu\nu}$ величин U^*, U_i с требуемою точностью.

Что касается величин U_i, то они входят в выражения (68.14)—(68.16) только в члены шестого порядка; поэтому достаточно знать их с той точностью, с какой они определены в § 55. Соответствующие формулы приведены также в § 65. [Эти формулы получаются и из уравнения (68.18), написанного для $\mu=0$, $\nu=i$, если пренебречь там величиной N^{0i} и второй производной по времени, заменить g на $-c^2$, взять в T^{0i} главный член и выразить $\mathfrak{g}^{0i}$ через U_i]. Мы имеем, согласно (65.05):

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i. \tag{68.19}$$

Величина же U^* входит в члены не шестого, а четвертого порядка, и ее нужно знать с большей точностью. По определению (67.11) мы имеем:

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2). \tag{68.20}$$

Согласно (67.04), производные от $U + \frac{1}{c^2}S$ равны производным от $\frac{c^3}{4}\mathfrak{g}^{00}$. Уравнение (68.18), написанное для $\mu = \nu = 0$, дает поэтому

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\left(U + \frac{1}{c^2}S\right) = -\frac{c^4}{2}N^{00} + 4\pi\gamma g T^{00}. \tag{68.21}$$

Далее, производные от $\frac{1}{c^2}S_{kk}$ — те же, как от $\frac{c}{4}\mathfrak{g}^{kk}$. Полагая в (68.18) $\mu = \nu = k$ и суммируя по k, получим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c^2}S_{kk} = -\frac{c^2}{2}N^{kk} - 4\pi\gamma T^{kk} \tag{68.22}$$

[во втором члене справа мы заменили множитель $(-g/c^2)$ единицей]. Наконец, мы можем написать:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{-2U^2}{c^2}\right) = -\frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 + 16\pi\gamma U T^{00}. \tag{68.23}$$

Мы пренебрегли здесь в операторе Даламбера второй производной по времени и воспользовались тождеством

$$\Delta(U^2) = 2(\operatorname{grad} U)^2 + 2U\,\Delta U, \tag{68.24}$$

а также равенствами

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho = -4\pi\gamma c^2 T^{00}. \tag{68.25}$$

Искомое уравнение для U^* получается сложением трех уравнений (68.21)—(68.23). Найдем его правую часть. Согласно (68.14), мы имеем

$$-\frac{c^4}{2}N^{00} = \frac{7}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2. \tag{68.26}$$

Вычисляя с той же точностью, получаем из (68.16) и (68.17)

$$-\frac{c^2}{2}N^{kk} = \frac{1}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2 \tag{68.27}$$

и, следовательно,

$$\frac{c^4}{2}N^{00} + \frac{c^2}{2}N^{kk} + \frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 = 0. \tag{68.28}$$

Используя это соотношение, а также формулу

$$4\pi\gamma g + 16\pi\gamma U = -4\pi\gamma c^2, \tag{68.29}$$

получаем для U^* простое уравнение

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,(c^2 T^{00} + T^{kk}). \tag{68.30}$$

Вне масс величина U^* удовлетворяет уравнению Даламбера с евклидовыми коэффициентами. Этого можно было ожидать на основании вида формулы (68.17) для функции Лагранжа.

В конце § 67 мы вывели для инварианта кривизны R приближенное выражение через функцию

$$f = \sqrt[4]{\frac{-g}{c^2}}, \tag{68.31}$$

пропорциональную корню четвертой степени из абсолютного значения определителя g. Мы имеем приближенно

$$R = \frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f\right). \tag{68.32}$$

В соединении с вытекающим из уравнений Эйнштейна соотношением

$$R = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\,T, \tag{68.33}$$

где T — инвариант тензора масс, предыдущее уравнение дает

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} f^3 T. \tag{68.34}$$

Сравним эту формулу с уравнением (68.30) для U^*. Для этого положим

$$f = 1 + \frac{U^{**}}{c^2}, \tag{68.35}$$

где, как это следует из сравнения с (67.09),

$$U^{**} = U + \frac{1}{c^2}\left(S - S_{kk} - \frac{3}{2}U^2\right). \tag{68.36}$$

Так же как и U^*, величина U^{**} в первом приближении равна ньютонову потенциалу U. Уравнение (68.34) принимает вид:

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(1 + \frac{3U}{c^2}\right) T. \tag{68.37}$$

С той же степенью точности можно написать

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,\{(c^2 + U)\,T^{00} - T^{kk}\}. \tag{68.38}$$

Последнее уравнение может быть также получено непосредственно из формул (68.21)—(68.23) и из определения (68.36) величины U^{**}.

Если инвариант T имеет вид (66.19), то будет

$$\left(1+\frac{3U}{c^2}\right)T=\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2+\Pi\right)\right\}-\frac{3}{c^2}p. \tag{68.39}$$

На основаниии этой формулы и уравнения (68.37) можно показать, что в данном приближении величина U^{**} будет аддитивной функцией от масс.

Полусумма

$$\overline{U}=\frac{1}{2}(U^*+U^{**}) \tag{68.40}$$

величин (68.20) и (68.36) удовлетворяет, как легко видеть, уравнению

$$\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}=-4\pi\gamma\left(c^2+\frac{1}{2}U\right)T^{00}, \tag{68.41}$$

содержащему справа только одну компоненту тензора массы. Это уравнение связано с уравнением Эйнштейна, содержащим ту же компоненту, а сама величина $\overline{U}$ связана с величиной $\mathfrak{g}^{00}$. Действительно, перемножая выражения

$$g^{00}=\frac{1}{c^2}\frac{c^2+U^*}{c^2-U^*};\qquad \sqrt{-g}=c\cdot\left(1+\frac{U^{**}}{c^2}\right)^2 \tag{68.42}$$

и учитывая, что величины U^* и U^{**} отличаются друг от друга и от $\overline{U}$ на члены порядка $1/c^2$, мы получим

$$\sqrt{-g}\,g^{00}=\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}+\frac{4}{c^3}\overline{U}+\frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \tag{68.43}$$

где $\overline{U}$ есть решение уравнения (68.41).

Формулу (68.43) для $\mathfrak{g}^{00}$ нетрудно проверить. Действительно, если $\mathfrak{g}^{00}$ имеет это значение, то

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2}=\frac{2}{c^4}\left(1+\frac{7\overline{U}}{2c^2}\right)\left(\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right)+$$
$$+\frac{7}{c^6}\left((\operatorname{grad}\overline{U})^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial t}\right)^2\right). \tag{68.44}$$

Мы можем заменить здесь в поправочных членах $\overline{U}$ на U и отбросить $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$. Пользуясь значением (68.14) величины N^{00}, мы получим

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2}+N^{00}=\frac{2}{c^4}\left(1+\frac{7U}{2c^2}\right)\left(\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right). \tag{68.45}$$

Сравнивая это соотношение с уравнением Эйнштейна (68.18), написанным для $\mu = \nu = 0$, мы приходим к уравнению (68.41). Заметим, что с той же степенью точности, с какой справедлива формула (68.43), мы можем написать

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} \frac{\left(1 + \frac{\overline{U}}{c^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{\overline{U}}{c^2}\right)}. \tag{68.46}$$

Для случая статического поля от сосредоточенной массы M мы получили в § 57 строгое решение. Сравнение с этим строгим решением показывает, что если, для этого случая, в формулах (68.41) и (68.46) положить

$$U^* = U^{**} = \overline{U} = \frac{\gamma M}{r}, \tag{68.47}$$

то они совпадут с точными [см. формулы (58.10) и (58.13)]. Значения (68.47) согласуются с уравнением Даламбера, которому эти величины должны удовлетворять вне масс по рассмотренной в этом параграфе приближенной теории.

§ 69. Связь между расходимостью тензора массы и величинами Γ^ν

В начале предыдущего параграфа мы уже упоминали, что если в тензоре Эйнштейна опустить с самого начала члены, содержащие Γ^ν, то равенство нулю расходимости тензора массы

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{69.01}$$

будет выполняться лишь поскольку выполняется условие гармоничности

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{69.02}$$

Для исследования уравнений движения необходимо изучить связь между условиями (69.01) и (69.02) или, точнее, между левыми частями соответствующих равенств.

Если не делать никаких пренебрежений, то левая часть (69.01) может быть представлена в виде некоторого довольно сложного дифференциального оператора от левых частей (69.02). Нас интересуют, однако, не эти точные формулы, а приближенные, соответствующие той точности, с которой в предыдущем параграфе выписаны уравнения Эйнштейна. К выводу этих приближенных формул мы и переходим.

Выражение для расходимости симметричного тензора было подробно выписано в § 65. Согласно формуле (65.24), пространственные