Сравнивая это соотношение с уравнением Эйнштейна (68.18), написанным для $\mu=\nu=0$, мы приходим к уравнению (68.41). Заметим, что с той же степенью точности, с какой справедлива формула (68.43), мы можем написать

$$\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}\frac{\left(1+\frac{\overline{U}}{c^2}\right)^3}{\left(1-\frac{\overline{U}}{c^2}\right)}. \tag{68.46}$$

Для случая статического поля от сосредоточенной массы M мы получили в § 57 строгое решение. Сравнение с этим строгим решением показывает, что если, для этого случая, в формулах (68.41) и (68.46) положить

$$U^*=U^{**}=\overline{U}=\frac{\gamma M}{r}, \tag{68.47}$$

то они совпадут с точными [см. формулы (58.10) и (58.13)]. Значения (68.47) согласуются с уравнением Даламбера, которому эти величины должны удовлетворять вне масс по рассмотренной в этом параграфе приближенной теории.

§ 69. Связь между расходимостью тензора массы и величинами Γ^ν

В начале предыдущего параграфа мы уже упоминали, что если в тензоре Эйнштейна опустить с самого начала члены, содержащие Γ^ν, то равенство нулю расходимости тензора массы

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{69.01}$$

будет выполняться лишь поскольку выполняется условие гармоничности

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=0. \tag{69.02}$$

Для исследования уравнений движения необходимо изучить связь между условиями (69.01) и (69.02) или, точнее, между левыми частями соответствующих равенств.

Если не делать никаких пренебрежений, то левая часть (69.01) может быть представлена в виде некоторого довольно сложного дифференциального оператора от левых частей (69.02). Нас интересуют, однако, не эти точные формулы, а приближенные, соответствующие той точности, с которой в предыдущем параграфе выписаны уравнения Эйнштейна. К выводу этих приближенных формул мы и переходим.

Выражение для расходимости симметричного тензора было подробно выписано в § 65. Согласно формуле (65.24), пространственные компоненты расходимости равны

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{00} T^{00} + 2\Gamma^i_{0k} T^{0k} + y_0 T^{0i} + \Gamma^i_{kl} T^{kl} + y_k T^{ik}. \quad (69.03)$$

Входящие сюда скобки Кристоффеля и величины y_α выписаны в § 67 [формулы (67.25) и (67.21)]. Преобразуем несколько эти формулы. Вводя, согласно (67.11), обозначение U^*, мы можем вместо первой формулы (67.25) написать

$$\Gamma^i_{00} = -\left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right). \quad (69.04)$$

Остальные две формулы (67.25) могут быть написаны в виде

$$\Gamma^i_{0k} = \frac{1}{2} y_0 \delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \quad (69.05)$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}(y_l \delta_{ik} + y_k \delta_{il}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}. \quad (69.06)$$

Вводя эти выражения в (69.03), получаем:

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + 2y_0 T^{i0} + 2y_k T^{ik} - \left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) T^{00} -$$
$$- \frac{4}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i} T^{kk}. \quad (69.07)$$

Умножим это выражение на определитель g, приближенно равный

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2}\right), \quad (69.08)$$

и воспользуемся тем, что коэффициенты при T^{00} и при T^{kk} почти пропорциональны друг другу. Мы получим

$$g\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial (gT^{i0})}{\partial t} + \frac{\partial (gT^{ik})}{\partial x_k} +$$
$$+ \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \quad (69.09)$$

Таково выражение для умноженной на g расходимости любого симметричного тензора. Но если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то имеют место уравнения

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma(c^2 T^{00} + T^{kk}), \quad (69.10)$$

$$\Delta U_k = -4\pi\gamma c^2 T^{0k}, \quad (69.11)$$

которые были установлены выше [формулы (68.19) и (68.30)]. При помощи них можно подвергнуть правую часть (69.09) дальнейшему преобразованию. Для этого рассмотрим введенные формулами

(68.14)—(68.16) величины $N^{\mu\nu}$ и обратим внимание на то, что в уравнения тяготения (68.18) эти величины входят вместе с тензором $T^{\mu\nu}$ в комбинации

$$A^{\mu\nu}=gT^{\mu\nu}-\frac{c^4}{8\pi\gamma}N^{\mu\nu}. \tag{69.12}$$

Составим сумму производных

$$A^{i}=\frac{\partial A^{i\nu}}{\partial x_{\nu}}. \tag{69.13}$$

Полагая для краткости

$$\frac{\partial U^{*}}{\partial t}+\frac{\partial U_{s}}{\partial x_{s}}=\Psi, \tag{69.14}$$

мы будем иметь

$$\frac{\partial N^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial N^{ik}}{\partial x_{k}}=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^{*}}{\partial x_{i}}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_{i}}{\partial t}\right)\left(\Delta U^{*}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{*}}{\partial t^2}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{s}}-\frac{\partial U_{s}}{\partial x_{i}}\right)\left(\Delta U_{s}-\frac{\partial \Psi}{\partial x_{s}}\right). \tag{69.15}$$

Поскольку в первом приближении имеет место равенство

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_{s}}{\partial x_{s}}=0 \tag{69.16}$$

см. формулу (55.42)], величина Ψ будет порядка не менее $1/c^2$, и в формуле (69.15) члены, содержащие производные от Ψ, могут быть отброшены. Отбрасывая эти члены и используя уравнения (69.10) и (69.11), мы получим из (69.15)

$$-\frac{c^4}{8\pi\gamma}\left(\frac{\partial N^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial N^{ik}}{\partial x_{k}}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial U^{*}}{\partial x_{i}}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_{i}}{\partial t}\right)(c^2T^{00}+T^{kk})+4\left(\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{k}}-\frac{\partial U_{k}}{\partial x_{i}}\right)T^{0k}. \tag{69.17}$$

Но правая часть этого равенства совпадает с дополнительными членами в правой части (69.09), которые, тем самым, представлены в виде суммы производных. Таким образом, если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то мы имеем

$$g\nabla_{\mu}T^{i\mu}=\frac{\partial}{\partial t}\left(gT^{i0}-\frac{c^4}{8\pi\gamma}N^{i0}\right)+\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(gT^{ik}-\frac{c^4}{8\pi\gamma}N^{ik}\right). \tag{69.18}$$

С другой стороны, дифференцируя уравнения тяготения, написанные в форме (68.18), мы получим

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_{k}}\right)=$$
$$=\frac{16\pi\gamma}{c^3}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(gT^{i0}-\frac{c^4}{8\pi\gamma}N^{i0}\right)+\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(gT^{ik}-\frac{c^4}{8\pi\gamma}N^{ik}\right)\right\}. \tag{69.19}$$

Сравнивая последние две формулы, можем написать:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right) = \frac{16\pi\gamma g}{c^3}\nabla_\mu T^{i\mu}. \tag{69.20}$$

Это приближенное соотношение играет важную роль при выводе уравнений движения.

Аналогичное соотношение можно вывести и для нулевой компоненты расходимости тензора массы. Дифференцируя приближенные уравнения Эйнштейна (68.18), получаем

$$\frac{1}{2c}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(gT^{0\mu}). \tag{69.21}$$

Для вычисления второго члена левой части (69.21) дифференцируем выражения (68.14) и (68.15) для N^{00} и N^{0i}. Используя равенство (69.16), мы получим

$$\frac{\partial N^{00}}{\partial t} + \frac{\partial N^{0i}}{\partial x_i} = \frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\Delta U + \frac{8}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta U_i. \tag{69.22}$$

Здесь мы можем выразить, по формулам (68.25) и (69.11), величины ΔU и ΔU_i через T^{00} и T^{0i}. Тогда будет

$$\frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu} = -\frac{24\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00} - \frac{32\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}T^{0i}. \tag{69.23}$$

Подставляя это в (69.21) и пользуясь выражением (69.08) для определителя g через U, получим, по умножении на $2c$:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3} g\left(\frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00}\right) \tag{69.24}$$

или

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3} g\nabla_\mu T^{0\mu}, \tag{69.25}$$

так как, согласно (65.23), нулевая компонента расходимости тензора массы приближенно равна выражению в скобках в правой части (69.24). Формула (69.25) построена вполне аналогично формуле (69.20) для пространственной компоненты расходимости тензора массы.

Обе эти формулы могут быть написаны в виде

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3} g\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{69.26}$$

Как было указано в начале этого параграфа, эти формулы являются приближенными. Они замечательны тем, что стоящий в левой части дифференциальный оператор имеет постоянные коэффициенты, вследствие чего они являются весьма удобными для исследования.