§ 70. Уравнения движения и условия гармоничности

Общая постановка задачи о движении системы масс была уже дана в § 64. Теперь нам надлежит рассмотреть вопрос о форме уравнений движения.

Мы знаем, что если рассматривать каждое из движущихся тел как сплошную среду, то внутри каждого тела должны выполняться уравнения

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{70.01}$$

С другой стороны, можно рассматривать движение каждого тела как целого, характеризуя его конечным числом параметров (координатами центра тяжести, значениями массы и моментов инерции и т. п.).

Тогда возникает задача найти уравнения движения для тел, как целых, т. е. дифференциальные уравнения для параметров, характеризующих каждое тело.

Мы перечислили некоторые из параметров, характеризующих тело. Чем обусловлен выбор этих параметров? Прежде всего — требованием, чтобы выбранные параметры были достаточны для нахождения сил, действующих на другие тела и определяющих их движение. В нашей задаче речь идет о силах тяготения. Поэтому параметры, характеризующие тело как целое, должны быть выбраны так, чтобы они позволяли с достаточной точностью определять поле тяготения в той области, где находятся другие тела. А так как тела находятся на больших расстояниях друг от друга, то параметры, относящиеся к данному телу, должны хорошо определять поле тяготения на больших расстояниях от него. Такими свойствами и обладают параметры, перечисленные выше.

Сказанное относится как к механике Ньютона, так и к механике Эйнштейна. Так как в теории Эйнштейна тяготение связано с метрикой, и именно метрика непосредственно влияет на движение тел, то основную роль в задаче нахождения уравнений движения системы тел должно играть рассмотрение метрики на больших расстояниях от тел. Как выбор параметров, так и вид уравнений движения должны быть подчинены требованию, чтобы на больших расстояниях от каждого тела правильно получалась метрика.

В конце § 69 были выведены приближенные соотношения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\, g\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{70.02}$$

Эти соотношения вытекают из уравнений Эйнштейна, написанных в приближенной форме (68.18). В строгом решении как правая часть (70.02), так и выражение под знаком оператора Даламбера в левой части равняются нулю в силу уравнений (70.01) и условий гармоничности

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{70.03}$$

Если же рассматривать приближенное решение, то соотношения (70.02) устанавливают связь между той степенью точности, с какой выполняются уравнения (70.01), и той степенью точности, с какой выполняются условия гармоничности (70.03).

Мы установили, что при нахождении закона движения тел как целых основное требование заключается в том, чтобы на больших расстояниях от каждого тела правильно получалась метрика. Это требование означает, в частности, что на больших расстояниях от каждого тела с возможно большей точностью должно выполняться условие гармоничности (70.03). Посмотрим, какие следствия вытекают отсюда для правой части уравнений (70.02).

Эти уравнения имеют вид обычных уравнений для запаздывающих потенциалов

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma, \tag{70.04}$$

причем, однако, необходимо помнить, что при самом выводе их были сделаны пренебрежения, равносильные разложению встречающихся функций по обратным степеням скорости света c. Поэтому и решать уравнения (70.04) в нашем случае имеет смысл только приближенно.

Мы начнем, однако, с рассмотрения точного решения. Предположим, что стоящая в правой части функция σ (которую мы будем называть плотностью) отлична от нуля только в ограниченной области пространства, в окрестностях точки с координатами

$$x_i = a_i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{70.05}$$

(это есть область, занятая одной из масс). Нас интересует то решение уравнения, которое физически соответствует потенциалу, порождаемому движущейся массой с плотностью σ (запаздывающий потенциал). Это решение имеет вид

$$\psi = \int \frac{[\sigma]\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{70.06}$$

где $[\sigma]$ есть запаздывающее значение плотности σ, а именно:

$$[\sigma] = \sigma(t',\ \mathbf{r}'); \qquad t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{70.07}$$

Интегрирование ведется по координатам $(x',\ y',\ z')$ и распространяется на область, занятую массой.

Переходим теперь к приближенным формулам. Разлагая величину $[\sigma]$ по обратным степеням скорости света c и ограничиваясь первыми членами, получим

$$\psi = \int \frac{\sigma\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \sigma\,dV' + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,\sigma\,dV', \tag{70.08}$$

где уже

$$\sigma = \sigma(t,\ \mathbf{r}'). \tag{70.09}$$

Написанное выражение мы можем, далее, разложить по обратным степеням расстояния от данной массы.

Используя разложения

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{(x_i-a_i)(x_i'-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \ldots, \\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= |\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{(x_i-a_i)(x_i'-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{70.10}$$

и полагая

$$\left.\begin{aligned} &\int \sigma(t,\ \mathbf{r}')\,dV' = \mu, \\ &\int \sigma(t,\ \mathbf{r}')(x_i'-a_i)\,dV' = \mu_i, \end{aligned}\right\} \tag{70.11}$$

мы получим

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{\mu_i(x_i-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \ldots - \frac{1}{c}\frac{d\mu}{dt} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\mu\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{\mu_i(x_i-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{70.12}$$

Величины μ и μ_i можно назвать „моментами" нулевого и первого порядка. Нетрудно видеть, что если положить $\mu = 0$, то члены, не содержащие c, будут при удалении от данной массы убывать по крайней мере как $1/|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$, член, обратно пропорциональный c, обратится в нуль, а члены, пропорциональные $1/c^2$, будут оставаться ограниченными. Если же, кроме того, потребовать, чтобы обращались в нуль моменты первого порядка, т. е. чтобы было $\mu_i = 0$, то в разложении (70.12) для ψ исчезнут и следующие по важности члены. При равенстве нулю также и моментов второго порядка

$$\int \sigma(x_i-a_i)(x_k-a_k)\,dV = \mu_{ik} \tag{70.13}$$

исчезли бы и дальнейшие члены и т. д. Не все эти условия являются, вообще говоря, независимыми. В общей сложности мы можем поставить столько независимых условий, сколько в нашем распоряжении имеется параметров.

Предположим теперь, что имеется несколько масс, так что плотность σ отлична от нуля в окрестностях нескольких точек, скажем

$$x_i = a_i(t); \qquad x_i = b_i(t), \ \ldots \tag{70.14}$$

Тогда те же рассуждения будут относиться к каждой из точек. Обозначая через

$$\mu^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma(t,\ \mathbf{r})\,dV; \qquad \mu^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma(t,\ \mathbf{r})\,dV; \qquad \ldots \tag{70.15}$$

и через

$$\mu_i^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma(t, \mathbf{r})(x_i - a_i)\, dV; \quad \mu_i^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma(t, \mathbf{r})(x_i - b_i)\, dV, \tag{70.16}$$

интегралы (70.11), распространенные на области, занятые каждой из масс, мы получим для ψ выражение

$$\psi = \sum_a \frac{\mu^{(a)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \sum_a \frac{\mu_i^{(a)}(x_i - a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} -$$

$$- \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum_a \mu^{(a)} + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_a \left\{ \mu^{(a)}|\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{\mu_i^{(a)}(x_i - a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots \right\}. \tag{70.17}$$

Для того чтобы функция ψ была мала в любой точке между массами, а также при удалении от всех масс, мы можем теперь потребовать выполнения ряда уравнений

$$\mu^{(a)} = 0, \qquad \mu_i^{(a)} = 0, \ \ldots, \tag{70.18}$$

из которых каждое относится к отдельной массе.

После этих общих рассуждений вернемся к рассмотрению уравнений (70.02). Мы постараемся удовлетворить требованию, чтобы в любой точке между массами, а также при удалении от всех масс, с возможно большей точностью удовлетворялось условие гармоничности (70.03).

При написании уравнений движения в четырехмерной форме уравнение, выражающее баланс энергии, обычно является следствием остальных уравнений движения. Поэтому мы займемся сперва пространственными компонентами соотношения (70.02) (соответствующими $\nu = 1, 2, 3$), а затем проверим выполнение условий, содержащих временну́ю компоненту ($\nu = 0$).

Сопоставляя (70.02) с (70.04), мы можем положить

$$\sigma = \sigma_i = -g\nabla_\alpha T^{\alpha i}, \tag{70.19}$$

$$\psi = \psi_i = \frac{c^3}{4\gamma}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha}. \tag{70.20}$$

Для того чтобы величины (70.20) были малы вне масс, необходимо выполнение ряда условий вида (70.18). Прежде всего, должны быть равны нулю интегралы

$$\mu^{i\,(a)} \equiv -\int\limits_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0, \tag{70.21}$$

распространенные на область каждой массы. Но, согласно (69.09)

$$g\nabla_\alpha T^{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial t}(gT^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_k} gT^{ik}) + \\ + \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \qquad (70.22)$$

Поэтому уравнения (70.21) могут быть написаны в виде

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} gT^{i0}(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk})(dx)^3 + \\ + 4\int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}(dx)^3, \qquad (70.23)$$

где для краткости положено

$$(dx)^3 = dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (70.24)$$

Напомним еще, что

$$g = -c^2 - 4U. \qquad (70.25)$$

Выражения для составляющих тензора массы упругого тела были получены нами в § 66. Согласно формуле (66.07), они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \qquad (70.26)$$

Если ограничиться главными членами, то результаты подстановки (70.26) в (70.23) будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}(dx)^3. \qquad (70.27)$$

Отсюда ясно, что уравнения (70.21) представляют уравнения движения центров инерции каждой из масс. Если число отдельных масс есть n, то таких уравнений будет $3n$. Таково будет число степеней свободы нашей механической системы, если рассматривать массы как материальные точки.

Переходя к рассмотрению других условий вида (70.18), мы можем потребовать равенства нулю следующих комбинаций моментов первого порядка:

$$\mu^{ik\,(a)} \equiv -\int g\,(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3 = 0. \qquad (70.28)$$

Если и здесь ограничиться главными членами, то уравнения (70.28) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\int_{(a)} \rho\,(x_i v_k - x_k v_i)\,(dx)^3 = \int_{(a)} \rho\left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \quad (70.29)$$

Они представляют, очевидно, закон изменения момента количества движения каждого из тел. В момент количества движения здесь включен как орбитальный момент, происходящий от движения по орбите, так и собственный момент, происходящий от вращения тела. Орбитальный момент может быть выделен путем составления комбинаций уравнений (70.27) и (70.29). Число уравнений вида (70.28) есть также $3n$, поэтому, если мы будем считать, что массы вращаются наподобие твердых тел, то число уравнений будет равно числу вращательных степеней свободы.

§ 71. Внутренняя и внешняя задачи механики системы тел. Ньютоновы уравнения для поступательного движения

В дальнейшем мы будем различать внутреннюю и внешнюю задачи механики. Уравнения движения внутри тела мы будем относить к внутренней, а уравнения движения тела как целого — к внешней задаче.

Рассмотрим влияние, в различных приближениях, внутренней структуры тела на его движение как целого.

Для получения ньютоновых уравнений движения в интегральной форме (70.27) и (70.29) достаточно было, как мы видели, использовать во внутренней задаче уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (71.01)$$

позволяющее написать нулевое приближение для некоторых компонент тензора массы

$$c^2 T^{00} = \rho; \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \quad (71.02)$$

Таким образом, о внутренней структуре тела не приходилось делать, в этом приближении, почти никаких предположений. Впрочем, более детальное рассмотрение внутренней структуры тела и невозможно без знания метрики с соответствующей точностью. Если называть нулевым приближением евклидову метрику, то первое приближение (следующее после евклидова) требует уже введения ньютонова потенциала тяготения U, а также вектор-потенциала U_i. Это и было сделано в § 55 на основе использованных там выражений (71.02) для тензора массы. Физически первое приближение для метрики соответствует, при рассмотрении внутренней структуры тела, учету сил тяготения.