Если и здесь ограничиться главными членами, то уравнения (70.28) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,(x_i v_k - x_k v_i)\,(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho\left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \quad (70.29)$$

Они представляют, очевидно, закон изменения момента количества движения каждого из тел. В момент количества движения здесь включен как орбитальный момент, происходящий от движения по орбите, так и собственный момент, происходящий от вращения тела. Орбитальный момент может быть выделен путем составления комбинаций уравнений (70.27) и (70.29). Число уравнений вида (70.28) есть также $3n$, поэтому, если мы будем считать, что массы вращаются наподобие твердых тел, то число уравнений будет равно числу вращательных степеней свободы.

## § 71. Внутренняя и внешняя задачи механики системы тел. Ньютоновы уравнения для поступательного движения

В дальнейшем мы будем различать внутреннюю и внешнюю задачи механики. Уравнения движения внутри тела мы будем относить к внутренней, а уравнения движения тела как целого — к внешней задаче.

Рассмотрим влияние, в различных приближениях, внутренней структуры тела на его движение как целого.

Для получения ньютоновых уравнений движения в интегральной форме (70.27) и (70.29) достаточно было, как мы видели, использовать во внутренней задаче уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (71.01)$$

позволяющее написать нулевое приближение для некоторых компонент тензора массы

$$c^2 T^{00} = \rho; \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \quad (71.02)$$

Таким образом, о внутренней структуре тела не приходилось делать, в этом приближении, почти никаких предположений. Впрочем, более детальное рассмотрение внутренней структуры тела и невозможно без знания метрики с соответствующей точностью. Если называть нулевым приближением евклидову метрику, то первое приближение (следующее после евклидова) требует уже введения ньютонова потенциала тяготения $U$, а также вектор-потенциала $U_i$. Это и было сделано в § 55 на основе использованных там выражений (71.02) для тензора массы. Физически первое приближение для метрики соответствует, при рассмотрении внутренней структуры тела, учету сил тяготения.

При выводе, в § 66, приведенного выше [формула (70.26)] тензора массы уже потребовались, помимо первого приближения для метрики, определенные предположения о внутренней структуре тела, а именно тело было предположено упругим. Помимо уравнения неразрывности (71.01), внутри тела предполагались выполненными ньютоновы уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (71.03)$$

Уравнение неразрывности для внутренней задачи позволяет получить ньютоновы уравнения движения (70.27) для внешней задачи. Уравнения же (71.03) для внутренней задачи и построенный на их основе тензор массы (70.26) позволяют получить, для внешней задачи, второе (релятивистское) приближение к уравнениям движения тела как целого. Это достигается при помощи формул (70.23).

Дальнейшая наша задача — получение, в явной форме, уравнений движения, вытекающих из установленных в конце предыдущего параграфа интегральных соотношений.

Для составления этих уравнений необходимо прежде всего указать, какие степени свободы мы имеем в виду рассматривать, иначе говоря, какими параметрами мы будем характеризовать нашу механическую систему. Соображения, определяющие выбор параметров, уже были приведены в начале предыдущего параграфа. На основании этих соображений мы будем рассматривать степени свободы, соответствующие, во-первых, поступательному движению каждого из тел и, во-вторых, вращению каждого тела вокруг его центра тяжести. При этом *мы будем предполагать, что тела вращаются наподобие твердых тел* (это, конечно, не означает, что тела предполагаются твердыми: таким движением могут обладать и жидкие тела) *).

В силу уравнения неразрывности масса тела

$$M_a=\int\limits_{(a)}\rho\,(dx)^3 \qquad (71.04)$$

есть величина постоянная; поэтому она в число переменных параметров не входит. Поступательное движение тела определяется изменением координат $a_i$ его центра тяжести. Эти величины вводятся при помощи соотношений

$$M_a a_i=\int\limits_{(a)}\rho x_i\,(dx)^3, \qquad (71.05)$$

которые могут быть написаны в виде

$$\int\limits_{(a)}\rho\,(x_i-a_i)\,(dx)^3=0. \qquad (71.06)$$

*) Напомним, что наши вычисления имеют приближенный характер. Затруднения, связанные с определением, в теории относительности, понятия твердого тела, в данном приближении еще не возникают.

Дифференцируя интеграл (71.05) по времени и пользуясь уравнением неразрывности, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int \rho x_i (dx)^3 = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_i (dx)^3 = -\int \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} x_i (dx)^3 = \int \rho v_i (dx)^3, \quad (71.07)$$

откуда

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \dot{a}_i. \quad (71.08)$$

Из соотношения (71.08) следует, что, независимо от распределения скоростей внутри тела, левая часть уравнения (70.27) равна произведению массы тела на ускорение центра тяжести

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \ddot{a}_i. \quad (71.09)$$

Вычислим интеграл в правой части (70.27). Ньютонов потенциал $U$ можно разбить на два слагаемых

$$U(\mathbf{r}) = u_a(\mathbf{r}) + U^{(a)}(\mathbf{r}), \quad (71.10)$$

где $u_a$ происходит от массы $M_a$, а $U^{(a)}$ — от остальных масс. Сообразно такому разложению, мы будем иметь:

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \quad (71.11)$$

Внутри массы $M_a$ потенциал $u_a$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\rho_a, \quad (71.12)$$

где $\rho_a$ есть плотность, принадлежащая данной массе. Он может быть представлен в виде интеграла

$$u_a = \gamma \int\limits_{(a)} \frac{\rho' (dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (71.13)$$

Потенциал же $U^{(a)}$, происходящий от других масс, будет, внутри данной массы, медленно меняющейся функцией от координат, которую можно разложить в ряд Тейлора по степеням $(x_j - a_j)$. Это позволяет приближенно вычислить второй интеграл, входящий в (71.11).

Подставляя выражение (71.13) для $u_a$ в первый из этих интегралов, будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = -\gamma \int\limits_{(a)}\int\limits_{(a)} \frac{\rho\rho'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (x_i - x_i') (dx)^3 (dx')^3. \quad (71.14)$$

Но двойной интеграл справа равен нулю, так как подинтегральная функция в нем антисимметрична в координатах обеих точек. Таким образом,

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{71.15}$$

Это соотношение может быть истолковано, как равенство нулю равнодействующей внутренних гравитационных сил.

Приведем еще одно доказательство этого соотношения. Положим

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathrm{grad}\; u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k}. \tag{71.16}$$

Тогда

$$\frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \Delta u_a. \tag{71.17}$$

или

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \tag{71.18}$$

в силу уравнения (71.12). Если мы в интеграле (71.15) будем разуметь под $\rho$ плотность $\rho_a$, принадлежащую данной массе, мы можем распространить интеграл на весь бесконечный объем, после чего получим

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = \int\limits_{(\infty)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 = 0, \tag{71.19}$$

так как на бесконечности величины $q_{ik}^{(a)}$ обращаются в нуль.

Обратимся к вычислению второго интеграла в (71.11). Разлагая потенциал $U^{(a)}$ внешних масс в ряд Тейлора, будем иметь

$$\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k}\right)_a (x_k - a_k) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a (x_k - a_k)(x_l - a_l) + \ldots \tag{71.20}$$

Умножая это выражение на $\rho$, интегрируя по объему массы $(a)$ и используя (71.06), будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a + \ldots, \tag{71.21}$$

где через $I_{kl}^{(a)}$ мы обозначили величины

$$I_{kl}^{(a)} = \int \rho \cdot (x_k - a_k)(x_l - a_l)(dx)^3, \tag{71.22}$$

которые мы будем называть моментами инерции массы $(a)$ (в механике это название носят несколько другие величины). Нам надлежит вычислить теперь значение потенциала $U^{(a)}$. Мы имеем

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \gamma \int_{(b)} \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (dx')^3, \qquad (71.23)$$

где штрих у знака суммы означает, что масса $(a)$ исключена из суммирования. Каждый член суммы представляет потенциал соответствующей массы. Рассмотрим один из них, например

$$u_b(\mathbf{r}) = \gamma \int_{(b)} \frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (71.24)$$

Подставляя сюда разложение

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} - (x'_k - b_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \\ + \frac{1}{2}(x'_k - b_k)(x'_l - b_l)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots, \qquad (71.25)$$

интегрируя почленно и используя формулу (71.06), а также обозначение (71.22), мы получим:

$$u_b(\mathbf{r}) = \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{2}\gamma I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots \qquad (71.26)$$

Следовательно, будет

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots \qquad (71.27)$$

Оценим порядок величины первой и второй суммы в этом выражении. Пусть $L$ есть длина, характеризующая линейные размеры тел, а $R$ — величина порядка расстояния между ними (см. § 64). Пусть $q$ характеризует порядок величины скорости тел. Мы будем считать, что по порядку величины

$$q^2 \sim \frac{\gamma M}{R}. \qquad (71.28)$$

Порядок величины моментов инерции будет, очевидно,

$$I_{kl} \sim ML^2. \qquad (71.29)$$

Поэтому первая сумма в (71.27) будет порядка $q^2$, а вторая — порядка $q^2 \frac{L^2}{R^2}$. Обозначенные многоточием невыписанные члены будут более высокого порядка относительно малой величины $L/R$ и мы их отбросим. С другой стороны, нетрудно видеть, что в формуле (71.27) второй член будет порядка $L^2/R^2$ по отношению к первому. Поэтому при вычислении второго члена мы можем отбросить в потенциале $U^{(a)}$ величины порядка $q^2\frac{L^2}{R^2}$, тогда как при вычислении первого члена мы должны их сохранить. Производя выкладки, получим:

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i}\sum_b{}' \left\{\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{2}\left(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}. \qquad (71.30)$$

Ввиду того, что величина

$$\frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = -\frac{\delta_{kl}}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} + \frac{3(a_k-b_k)(a_l-b_l)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^5} \qquad (71.31)$$

симметрична относительно **a** и **b**, выражение в фигурных скобках в (71.30) также будет симметрично. Вводя двойную сумму

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\left\{\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{\gamma}{2}\left(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}, \qquad (71.32)$$

мы можем поэтому написать

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \qquad (71.33)$$

Уравнение (70.27), которое мы выпишем еще раз,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}(dx)^3 \qquad (71.34)$$

примет теперь вид

$$M_a \ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \qquad (71.35)$$

Величина $\Phi$ есть, очевидно, ньютонова потенциальная энергия нашей механической системы, выраженная через координаты и моменты инерции. Заметим, что при выводе этих уравнений мы еще не делали, помимо (71.01), никаких предположений о распределении скоростей внутри тела.

Если все рассматриваемые тела обладают сферической симметрией, то для каждого тела тензор моментов инерции $I_{kl}$ будет пропорционален единичному тензору

$$I_{kl} = I\delta_{kl}. \qquad (71.36)$$

В этом случае потенциальная энергия $\Phi$ совсем не будет содержать моментов инерции, а будет зависеть только от координат $a_i$

(и, конечно, от масс $M_a$, которые постоянны). Тогда система уравнений (71.35) будет полной: она будет содержать столько уравнений, сколько неизвестных координат центров тяжести масс. Это будут обычные уравнения движения системы материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона.

В общем же случае, когда тела сферической симметрией не обладают, в уравнения движения войдут, помимо координат центров тяжести масс, их моменты инерции, и система уравнений (71.35) не будет тогда полной. В этом случае можно получить полную систему, если ввести предположение, что тела вращаются вокруг своих центров тяжести наподобие твердых тел. Это значит, что распределение скоростей внутри каждого тела имеет вид

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)}(x_j - a_j), \qquad (71.37)$$

где $\omega_{ji}^{(a)}$ есть трехмерный антисимметричный тензор угловой скорости тела $(a)$. Опуская значок $(a)$, мы можем также писать для его составляющих

$$\omega_{23} = \omega_1; \qquad \omega_{31} = \omega_2; \qquad \omega_{12} = \omega_3. \qquad (71.38)$$

При таком предположении полная система уравнений получится, если присоединить к (71.35) уравнения, выражающие закон изменения количества движения каждого из тел. Вывод этих уравнений из соотношений (70.29) будет дан в следующем параграфе.

## § 72. Ньютоновы уравнения вращательного движения

Положим

$$M_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \rho\,[(x_i - a_i)\,v_k - (x_k - a_k)\,v_i]\,(dx)^3. \qquad (72.01)$$

Это есть, очевидно, момент количества движения тела $(a)$ относительно его центра тяжести. Закон изменения этой величины получается из (70.29) после выделения членов, относящихся к орбитальному моменту количества движения. Эта операция сводится к применению соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\{a_i \int\limits_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - a_k \int\limits_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3\right\} =$$

$$= a_i \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_k}\,(dx)^3 - a_k \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,(dx)^3, \qquad (72.02)$$

которое вытекает из уравнений движения (71.34) и из формулы (71.08), в силу которой

$$\dot{a}_i \int\limits_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - \dot{a}_k \int\limits_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3 = 0. \qquad (72.03)$$