(и, конечно, от масс M_a, которые постоянны). Тогда система уравнений (71.35) будет полной: она будет содержать столько уравнений, сколько неизвестных координат центров тяжести масс. Это будут обычные уравнения движения системы материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона.

В общем же случае, когда тела сферической симметрией не обладают, в уравнения движения войдут, помимо координат центров тяжести масс, их моменты инерции, и система уравнений (71.35) не будет тогда полной. В этом случае можно получить полную систему, если ввести предположение, что тела вращаются вокруг своих центров тяжести наподобие твердых тел. Это значит, что распределение скоростей внутри каждого тела имеет вид

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)}(x_j - a_j), \tag{71.37}$$

где $\omega_{ji}^{(a)}$ есть трехмерный антисимметричный тензор угловой скорости тела (a). Опуская значок (a), мы можем также писать для его составляющих

$$\omega_{23} = \omega_1; \qquad \omega_{31} = \omega_2; \qquad \omega_{12} = \omega_3. \tag{71.38}$$

При таком предположении полная система уравнений получится, если присоединить к (71.35) уравнения, выражающие закон изменения количества движения каждого из тел. Вывод этих уравнений из соотношений (70.29) будет дан в следующем параграфе.

§ 72. Ньютоновы уравнения вращательного движения

Положим

$$M_{ik}^{(a)} = \int_{(a)} \rho\,[(x_i - a_i)\,v_k - (x_k - a_k)\,v_i]\,(dx)^3. \tag{72.01}$$

Это есть, очевидно, момент количества движения тела (a) относительно его центра тяжести. Закон изменения этой величины получается из (70.29) после выделения членов, относящихся к орбитальному моменту количества движения. Эта операция сводится к применению соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\{a_i \int_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - a_k \int_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3\right\} = \\ = a_i \int_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_k}\,(dx)^3 - a_k \int_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,(dx)^3, \tag{72.02}$$

которое вытекает из уравнений движения (71.34) и из формулы (71.08), в силу которой

$$\dot{a}_i \int_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - \dot{a}_k \int_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3 = 0. \tag{72.03}$$

Выпишем уравнения (70.29) еще раз

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho(x_i v_k - x_k v_i)(dx)^3 = \int\limits_{(a)}\rho\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \quad (72.04)$$

Вычитая из них соотношения (72.02), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho\,[(x_i - a_i)v_k - (x_k - a_k)v_i]\,(dx)^3 =$$
$$= \int\limits_{(a)}\rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](dx)^3, \quad (72.05)$$

или, пользуясь обозначением (72.01):

$$\frac{d}{dt}M_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)}\rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](dx)^3. \quad (72.06)$$

Вычислим величину $M_{ik}^{(a)}$. Подставляя в (72.01) выражение (71.37) для скорости и пользуясь обозначениями (71.22) для трехмерного тензора моментов инерции, мы получим

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)}I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)}I_{jk}^{(a)}. \quad (72.07)$$

В более подробной записи эти соотношения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= (I_{22} + I_{33})\,\omega_{23} - I_{12}\omega_{31} - I_{13}\omega_{12},\\ M_{31} &= -I_{12}\omega_{23} + (I_{33} + I_{11})\,\omega_{31} - I_{23}\omega_{12},\\ M_{12} &= -I_{13}\omega_{23} - I_{23}\omega_{31} + (I_{11} + I_{22})\,\omega_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (72.08)$$

Верхний значок (a) здесь для краткости опущен. Это — известные из механики твердого тела формулы, связывающие момент количества движения с угловой скоростью.

Вычислим теперь правую часть уравнения (72.06), которая, очевидно, представляет момент сил, действующих на тело. Сообразно разделению (71.10) потенциала на внутренний и внешний, рассмотрим сперва момент внутренних сил. При помощи соотношения (71.18) легко проверить, что момент внутренних сил равен нулю. Действительно, рассуждая, как при выводе (71.19), мы приходим к равенству

$$\int\limits_{(a)}\rho\left\{(x_i - a_i)\frac{\partial u_a}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\right\}(dx)^3 =$$
$$= \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)}\frac{\partial}{\partial x_j}\{(x_i - a_i)\,q_{kj}^{(a)} - (x_k - a_k)\,q_{ij}^{(a)}\}\,(dx)^3 = 0. \quad (72.09)$$

Остается вычислить момент внешних сил. Пользуясь разложением (71.20), в котором, однако, мы удержим только постоянный и линейный члены, мы получим

$$\int\limits_{(a)} \rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right](dx)^3 = \\ = I_{ij}^{(a)}\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k\,\partial x_j}\right)_a - I_{kj}^{(a)}\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_a. \tag{72.10}$$

Подставляя сюда выражение (71.27) для $U^{(a)}$, мы можем ограничиться в нем первой суммой. Это дает

$$\int\limits_{(a)} \rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right](dx)^3 = \\ = \sum_b{}' \gamma M_b\left\{I_{ij}^{(a)}\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial a_j}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - I_{kj}^{(a)}\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_j}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}. \tag{72.11}$$

Поскольку, согласно (72.09), момент внешних сил равен полному моменту сил, мы можем заменить здесь $U^{(a)}$ на U. Выражение (72.11) даст тогда правую часть уравнения (72.06), и мы можем написать закон изменения момента количества движения тела (a) в виде *)

$$\frac{d}{dt}M_{ik}^{(a)} = \sum_b \gamma M_b\left\{I_{ij}^{(a)}\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial a_j}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - I_{kj}^{(a)}\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_j}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}. \tag{72.12}$$

Вводя явные выражения (71.31) для вторых производных, мы можем также написать

$$\frac{d}{dt}M_{ik}^{(a)} = \sum_b \frac{3\gamma Mb\,(a_j - b_j)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^5}\left[(a_k - b_k)I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i)I_{kj}^{(a)}\right]. \tag{72.13}$$

Эти уравнения дополняют выведенные ранее уравнения движения центров тяжести

$$M_a\ddot{a}_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} \tag{72.14}$$

до полной системы. В этом можно убедиться различными путями. Мы можем рассматривать в качестве неизвестных, характеризующих движение каждой массы, величины

$$a_i, \qquad I_{ij}^{(a)}, \qquad \omega_{ij}^{(a)}; \tag{72.15}$$

всего двенадцать величин [составляющие момента количества движения выражаются через них по формулам (72.07)]. Для этих вели-

*) Из уравнений Эйнштейна это уравнение было впервые выведено (другим способом) В. П. Кашкаровым [39].

чин мы имеем: три уравнения (72.14) (движение центра инерции), три уравнения (72.13) (закон изменения количества движения) и еще шесть уравнений

$$\frac{dI_{ik}^{(a)}}{dt} = \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \tag{72.16}$$

справедливых для всякого тензора, компоненты которого в системе координат, связанной с телом, постоянны (вывод мы приведем ниже). Таким образом, для двенадцати неизвестных (72.15) мы имеем двенадцать уравнений, и система уравнений будет полной.

Мы могли бы вести рассуждение и иначе, введя в рассмотрение, для каждого тела, координатную систему x_1^*, x_2^*, x_3^*, вращающуюся вместе с телом (верхний значок (a) мы для краткости опускаем). Обозначая через α_{ri} косинусы углов, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_{ri}\alpha_{rj} = \delta_{ij}; \qquad \alpha_{ri}\alpha_{si} = \delta_{rs}, \tag{72.17}$$

мы можем положить

$$x_r^* = \alpha_{ri}(x_i - a_i); \qquad x_i - a_i = \alpha_{ri} x_r^*. \tag{72.18}$$

Производные от косинусов связаны с составляющими угловой скорости соотношениями

$$\dot{\alpha}_{ri} = \alpha_{rj}\omega_{ji}; \qquad \omega_{ji} = \alpha_{rj}\dot{\alpha}_{ri}. \tag{72.19}$$

По известным формулам кинематики твердого тела девять косинусов α_{ri} выражаются через три эйлеровых угла ϑ, φ, ψ. Для каждой массы мы могли бы, вместо (72.15), взять в качестве неизвестных функций шесть величин

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \vartheta^{(a)},\ \varphi^{(a)},\ \psi^{(a)} \tag{72.20}$$

и выразить через них все остальные, в частности величины (72.15). Так, угловая скорость уже выражена в (72.19) через косинусы и их производные. Что касается моментов инерции, то они выражаются по формулам

$$I_{ij} = \alpha_{ri}\alpha_{sj} I_{ij}^*, \tag{72.21}$$

где I_{ij}^* — постоянные значения составляющих этого тензора в системе, связанной с телом. Для шести величин (72.20), относящихся к каждой массе, мы имели бы шесть уравнений (72.13) и (72.14), т. е. надлежащее число уравнений для того, чтобы система уравнений была полной.

Приведенные здесь вычисления уравнений движения в ньютоновом приближении предполагают возможность отбрасывать (помимо релятивистских поправок) члены более высокого порядка относительно малой величины L/R. Если бы мы пожелали сохранить эти члены, нам пришлось бы рассматривать моменты инерции третьего и более высокого порядка, например

$$I_{ikl}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \rho (x_i - a_i)(x_k - a_k)(x_l - a_l)(dx)^3. \tag{72.22}$$

Но это не нарушило бы полноту системы уравнений. В самом деле, мы могли бы рассматривать вновь введенные величины как функции эйлеровых углов, например

$$I_{ikl} = \alpha_{ri}\alpha_{sk}\alpha_{ul}\overset{*}{I}_{rsu}, \tag{72.23}$$

где $\overset{*}{I}_{rsu}$ — постоянные. Тогда неизвестными функциями остались бы попрежнему величины (72.20), так что число неизвестных функций не увеличилось бы. При другом способе рассмотрения мы могли бы включить вновь введенные величины в число неизвестных функций и соответственно дополнить систему уравнений, например написать для величин (72.22) уравнения:

$$\frac{d}{dt} I_{ikl}^{(a)} = \omega_{ji}^{(a)} I_{jkl}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ijl}^{(a)} + \omega_{jl}^{(a)} I_{ikj}^{(a)}. \tag{72.24}$$

В общем случае произвольного трехмерного тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, составляющие которого $\overset{*}{A}_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ в системе, связанной с телом, постоянны, мы имели бы

$$\frac{d}{dt} A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \omega_{ji_1} A_{j, i_2 \ldots i_n} + \omega_{ji_k} A_{i_1, \ldots i_{k-1}, j, i_k, \ldots i_n} + \\ + \omega_{ji_n} A_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}, j}. \tag{72.25}$$

Эти уравнения непосредственно следуют из формул преобразования

$$A_{i_1, i_2 \ldots i_n} = \alpha_{r_1 i_1}\alpha_{r_2 i_2} \ldots, \alpha_{r_n i_n} \overset{*}{A}_{r_1 r_2 \ldots r_n} \tag{72.26}$$

в соединении с формулами (72.19).

В заключение проверим выполнение закона сохранения энергии для системы уравнений (72.13) и (72.14). Введем кинетическую энергию вращения тела вокруг своего центра тяжести

$$T_a = \frac{1}{2} \omega_{kj}^{(a)} \omega_{lj}^{(a)} I_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4} M_{ik}^{(a)} \omega_{ik}^{(a)}. \tag{72.27}$$

При составлении производной от T_a по времени нужно иметь в виду, что в силу уравнений (72.16) будет

$$\omega_{kj}^{(a)} \omega_{lj}^{(a)} \frac{dI_{kl}^{(a)}}{dt} = 0, \tag{72.28}$$

так что при дифференцировании T_a величины $I_{kl}^{(a)}$ могут рассматриваться как постоянные. Имея это в виду, легко получаем

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{2} \omega_{ik}^{(a)} \frac{dM_{ik}^{(a)}}{dt}. \tag{72.29}$$

Подставляя сюда выражение (72.12) для производной от $M_{ik}^{(a)}$ и пользуясь антисимметрией $\omega_{ik}^{(a)}$, будем иметь

$$\frac{dT_a}{dt}=\omega_{ik}^{(a)}\sum_b{}'\gamma M_b I_{ij}^{(a)}\frac{\partial^2}{\partial a_j\,\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{72.30}$$

или, после симметризации относительно j и k и последующего переименования значков,

$$\frac{dT_a}{dt}=\frac{1}{2}\sum_b{}'\gamma M_b\left(\omega_{ji}^{(a)}I_{jk}^{(a)}+\omega_{jk}^{(a)}I_{ij}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{72.31}$$

или, наконец, в силу (72.16):

$$\frac{dT_a}{dt}=\frac{1}{2}\sum_b{}'\gamma M_b\frac{dI_{ik}^{(a)}}{dt}\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{72.32}$$

Припомним выражение (71.32) для потенциальной энергии

$$\Phi=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\left\{\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}+\frac{\gamma}{2}\left(M_a I_{ik}^{(b)}+M_b I_{ik}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}. \tag{72.33}$$

Величина Φ зависит от времени через посредство координат a_i и через посредство моментов инерции $I_{ik}^{(a)}$. Эта последняя зависимость дает в выражении для полной производной от Φ по времени члены, которые равны

$$\frac{d\Phi}{dt}-\sum_a\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}\dot{a}_i=-\sum_a\frac{dT_a}{dt}, \tag{72.34}$$

как это видно из сравнения (72.33) с (72.32). В силу уравнений движения для центров тяжести масс мы получаем отсюда

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_a\left(\frac{1}{2}M_a\dot{a}_i^2+T_a\right)+\Phi\right\}=0 \tag{72.35}$$

и закон сохранения энергии в форме

$$\sum_a\left(\frac{1}{2}M_a\dot{a}_i^2+T_a\right)+\Phi=E, \tag{72.36}$$

где E — постоянная энергии. Заметим, что даже при очень быстром вращении тел, когда линейные скорости поступательного и вращательного движения — одного порядка, в балансе энергии (72.34) вращательные члены будут малы $\left(\text{порядка } \frac{L}{R} \text{ по отношению к главным}\right)$.