§ 73. Внутренняя структура тела. Уравнение Ляпунова

Уравнения поступательного движения в интегральной форме были найдены, во втором приближении, в конце § 70. Выпишем их в развернутом виде. Подставляя значения составляющих тензора массы упругого тела из (70.26) в уравнения движения (70.23), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\rho v_i\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)-\frac{1}{c^2}p_{ik}v_k\right\}(dx)^3=\right.$$

$$=\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left\{\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{p_{kk}}{c^2}\right\}(dx)^3+$$

$$+\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\rho v_k(dx)^3. \tag{73.01}$$

Здесь величина U^* удовлетворяет, согласно (68.30), уравнению

$$\Delta U^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}=-4\pi\gamma\left\{\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{p_{kk}}{c^2}\right\}. \tag{73.02}$$

В первом приближении U^* совпадает с ньютоновым потенциалом U, но нам нужно знать U^* во втором приближении, с поправками на запаздывание и с учетом дополнительных членов в правой части (73.02). Величины же U_i, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta U_i=-4\pi\gamma\rho v_i, \tag{73.03}$$

достаточно знать в первом приближении.

Как мы указывали в § 71, для того чтобы получить из (73.01) релятивистские уравнения движения в явной форме, необходимо рассмотреть в ньютоновом приближении внутреннюю структуру тела и соответствующие уравнения (71.03):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{73.04}$$

Мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда тело вращается как целое, наподобие твердого тела. Тогда распределение скоростей внутри тела имеет вид (см. 71.37):

$$v_i=\dot a_i+\omega_{ji}(x_j-a_j) \tag{73.05}$$

[значок (a) при ω_{ji} подразумевается]. Отсюда ускорение частицы внутри тела

$$w_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{73.06}$$

равно

$$w_i=\ddot a_i+(\dot\omega_{ji}-\omega_{ik}\omega_{jk})(x_j-a_j). \tag{73.07}$$

Разложим входящий в (73.04) ньютонов потенциал U на внутренний (u_a) и внешний $(U^{(a)})$, причем внешний потенциал заменим первыми членами разложения в ряд Тейлора вблизи точки $x_j = a_j$. Вместо ускорения частицы w_i подставим его выражение (73.07). Мы получим тогда

$$\rho\ddot{a}_i - \rho\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a - \rho\frac{\partial u_a}{\partial x_i} +$$
$$+ \rho\left[\dot{\omega}_{ji} - \omega_{ik}\omega_{jk} - \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a\right](x_j - a_j) = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{73.08}$$

Оценим здесь порядок величины различных членов и сохраним только главные. Из ньютоновых уравнений движения (71.35) нетрудно заключить, что

$$\ddot{a}_i \sim \frac{q^2}{R}. \tag{73.09}$$

Того же порядка будет входящая во второй член (73.08) величина $\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a$. Но разность этих величин будет мала. Из сопоставления (71.21) с (71.33) следует, что будет

$$\ddot{a}_i - \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a \sim \frac{q^2}{R}\cdot\frac{L^2}{R^2}. \tag{73.10}$$

(Для почти шаровидных масс эта разность будет еще меньше, так как значение ее обусловлено неравенством моментов инерции, а не самыми моментами инерции.) Поэтому мы можем считать, что первые два члена в (73.08) сокращаются.

Переходим к оценке членов в квадратных скобках. Здесь главный член есть $\omega_{ik}\omega_{jk}$; он имеет порядок величины квадрата угловой скорости. Мы примем, что угловая скорость будет порядка

$$\omega \sim \frac{q}{L}. \tag{73.11}$$

Порядок величины, производной от угловой скорости по времени, определится из закона изменения момента количества движения. Нетрудно получить оценку

$$\dot{\omega} \sim \frac{q^2}{R^2}. \tag{73.12}$$

Сопоставляя ее с оценкой для ω, получаем

$$\dot{\omega} \sim \omega^2\frac{L^2}{R^2}. \tag{73.13}$$

Далее, вторая производная от внешнего потенциала по координатам будет порядка

$$\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a \sim \frac{q^2}{R^2}. \tag{73.14}$$

т. е. того же порядка, как $\dot{\omega}$. Пренебрегая величинами такого порядка *), мы сохраним в квадратных скобках только член $\omega_{ik}\omega_{jk}$. После этих упрощений мы можем написать „внутренние" уравнения движения (73.08) в виде

$$\rho\left\{\frac{\partial u_a}{\partial x_i}+\omega_{ik}\omega_{jk}(x_j-a_j)\right\}+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{73.15}$$

Положим

$$u_a+\frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i-a_i)(x_j-a_j)=V_a. \tag{73.16}$$

Это есть потенциал тяготения, сложенный с потенциалом центробежной силы. Уравнение (73.15) может быть написано в виде

$$\rho\frac{\partial V_a}{\partial x_i}+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{73.17}$$

Этому уравнению можно удовлетворить, предположив, что тензор напряжений внутри тела p_{ik} сводится к изотропному давлению p

$$p_{ik}=-p\delta_{ik} \tag{73.18}$$

(такому условию всегда удовлетворяет жидкость). Если бы мы не пренебрегали в (73.08) величинами $\dot{\omega}_{ji}$, мы должны были бы рассматривать и не-диагональные элементы тензора напряжений p_{ik}. В самом деле, очевидно, что изменение угловой скорости вращения упругого тела должно вызывать в нем напряжения, которые не сводятся к изотропному давлению.

При условии (73.18) уравнение (73.17) приводится к следующему:

$$\rho\frac{\partial V_a}{\partial x_i}=\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{73.19}$$

Вытекающее из него соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k}\frac{\partial V_a}{\partial x_i}-\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{\partial V_a}{\partial x_k}=0 \tag{73.20}$$

показывает, что V_a и ρ должны быть связаны зависимостью, не содержащей координат, так что если ρ есть функция от одного параметра α, то и V_a должно быть функцией от того же параметра

$$\rho=\rho(\alpha); \qquad V_a=V_a(\alpha). \tag{73.21}$$

Внутренний потенциал u_a есть функционал от ρ; подставляя в (73.16) его явное выражение, получим

$$\gamma\int\limits_{(a)}\frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i-a_i)(x_k-a_k)=V_a. \tag{73.22}$$

---

*) Такое пренебрежение делается только в уравнениях внутренней задачи [см. (80.13)].

Задача состоит в том, чтобы при заданной плотности ρ найти форму тела, т. е. форму области интегрирования (a). Эта форма должна быть такова, чтобы в любой точке внутри тела выполнялось условие (73.21), т. е. чтобы значение левой части (73.22) само зависело только от плотности (или от того параметра, от которого зависит плотность). В частности, на поверхности тела должно быть $\alpha = \text{const}$ и $V_a = \text{const}$.

Если тело не вращается ($\omega_{ik} = 0$), то всем условиям, очевидно, удовлетворяет сферически-симметричное распределение плотности при сферической форме тела. В случае вращения ($\omega_{ik} \neq 0$) нахождение формы тела представляет чрезвычайно трудную математическую задачу, которой занимались многие математики. Наиболее полные результаты были получены А. И. Ляпуновым, который, для вращающейся неоднородной жидкости, исследовал фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам, причем рассматривал также вопрос о их устойчивости [21, 22]. Мы будем поэтому называть уравнение (73.22) уравнением Ляпунова.

Если условие (73.20) или (73.21) выполнено, то давление p может быть найдено из уравнения

$$dp = \rho\, dV_a \tag{73.23}$$

или

$$p = \int^{\alpha} \rho(\alpha) \frac{dV_a}{d\alpha}\, d\alpha. \tag{73.24}$$

Аддитивную постоянную мы определим из условия, чтобы на поверхности тела давление p обращалось в нуль.

В выражения для тензора массы, а также в уравнения (73.01) и (73.02) входит упругая энергия Π единицы массы, определяемая, согласно (30.11), по формуле

$$\Pi = \int^{p} \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho}. \tag{73.25}$$

Вследствие (73.23), входящий сюда интеграл есть как раз V_a или величина, отличающаяся от V_a на постоянную. Эту постоянную можно определить так, чтобы было

$$p = \rho(V_a - \Pi). \tag{73.26}$$

Это выражение будет использовано при выводе уравнений движения из интегральных соотношений (73.01).

§ 74. Вычисление некоторых интегралов, характеризующих внутреннюю структуру тела

Для вывода уравнений движения из интегральных соотношений (73.01) необходимо вычислить ряд интегралов, значение которых зависит от распределения плотности внутри тела и вообще от его