Задача состоит в том, чтобы при заданной плотности ρ найти форму тела, т. е. форму области интегрирования (a). Эта форма должна быть такова, чтобы в любой точке внутри тела выполнялось условие (73.21), т. е. чтобы значение левой части (73.22) само зависело только от плотности (или от того параметра, от которого зависит плотность). В частности, на поверхности тела должно быть $\alpha = \text{const}$ и $V_a = \text{const}$.

Если тело не вращается ($\omega_{ik} = 0$), то всем условиям, очевидно, удовлетворяет сферически-симметричное распределение плотности при сферической форме тела. В случае вращения ($\omega_{ik} \neq 0$) нахождение формы тела представляет чрезвычайно трудную математическую задачу, которой занимались многие математики. Наиболее полные результаты были получены А. И. Ляпуновым, который, для вращающейся неоднородной жидкости, исследовал фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам, причем рассматривал также вопрос о их устойчивости [21, 22]. Мы будем поэтому называть уравнение (73.22) уравнением Ляпунова.

Если условие (73.20) или (73.21) выполнено, то давление p может быть найдено из уравнения

$$dp = \rho\, dV_a \tag{73.23}$$

или

$$p = \int^{\alpha} \rho(\alpha) \frac{dV_a}{d\alpha}\, d\alpha. \tag{73.24}$$

Аддитивную постоянную мы определим из условия, чтобы на поверхности тела давление p обращалось в нуль.

В выражения для тензора массы, а также в уравнения (73.01) и (73.02) входит упругая энергия Π единицы массы, определяемая, согласно (30.11), по формуле

$$\Pi = \int^{p} \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho}. \tag{73.25}$$

Вследствие (73.23), входящий сюда интеграл есть как раз V_a или величина, отличающаяся от V_a на постоянную. Эту постоянную можно определить так, чтобы было

$$p = \rho(V_a - \Pi). \tag{73.26}$$

Это выражение будет использовано при выводе уравнений движения из интегральных соотношений (73.01).

§ 74. Вычисление некоторых интегралов, характеризующих внутреннюю структуру тела

Для вывода уравнений движения из интегральных соотношений (73.01) необходимо вычислить ряд интегралов, значение которых зависит от распределения плотности внутри тела и вообще от его внутренней структуры. Чтобы не прерывать в дальнейшем изложения, мы сосредоточим вычисление таких интегралов в этом параграфе.

Начнем с интегралов, зависящих от моментов инерции тела и от его угловой скорости. Обозначим через Ω_a потенциал центробежных сил

$$\Omega_a = \frac{1}{2}\omega_{ik}^{(a)}\omega_{jk}^{(a)}(x_i - a_i)(x_j - a_j). \tag{74.01}$$

Уравнение Ляпунова (73.16) примет вид

$$u_a + \Omega_a = V_a. \tag{74.02}$$

Рассмотрим интеграл

$$T_a = \int \rho\Omega_a (dx)^3. \tag{74.03}$$

Мы имеем, очевидно,

$$T_a = \frac{1}{2}\omega_{ik}^{(a)}\omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \tag{74.04}$$

так что T_a есть кинетическая энергия вращения тела (a). Рассмотрим также моменты первого порядка с весовой функцией $\rho\Omega_a$, т. е. величины

$$T_{ai} = \int \rho\Omega_a (x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.05}$$

При помощи обозначений (72.22) мы можем написать

$$T_{ai} = \frac{1}{2}\omega_{kj}^{(a)}\omega_{lj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)}. \tag{74.06}$$

Эти величины равны нулю, если тело имеет три плоскости симметрии.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\int \rho u_a (dx)^3, \tag{74.07}$$

который представляет энергию взаимного притяжения частиц, составляющих тело (взятую с обратным знаком), а также моменты первого порядка

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{2}\int \rho u_a (x_i - a_i)(dx)^3, \tag{74.08}$$

Используя уравнение Пуассона (71.12), можно представить величину ε_a в виде:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3. \tag{74.09}$$

Аналогично могут быть преобразованы и моменты ε_{ai}, а именно:

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.10}$$

Припоминая определение (71.16) величин $q_{ik}^{(a)}$

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{74.11}$$

причем

$$q_{kk}^{(a)} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u_a)^2, \tag{74.12}$$

мы можем вместо (74.09) и (74.10) написать:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kk}^{(a)}(dx)^3, \tag{74.13}$$

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kk}^{(a)}(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.14}$$

Эти интегралы представляют частные случаи более общих

$$B_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kl}^{(a)}(dx)^3, \tag{74.15}$$

$$B_{i,\,kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kl}^{(a)}(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.16}$$

Помимо рассмотренных выше интегралов

$$\varepsilon_a = B_{kk}^{(a)}; \qquad \varepsilon_{ai} = B_{i,\,kk}^{(a)}, \tag{74.17}$$

через величины (74.15), (74.16) могут быть выражены и другие нужные нам интегралы.

Рассмотрим интеграл по объему от давления p:

$$I = \int\limits_{(a)} p\,(dx)^3. \tag{74.18}$$

Так как давление p обращается в нуль вне массы, то, интегрируя по частям, мы получаем:

$$3I = -\int\limits_{(a)} (x_i - a_i)\frac{\partial p}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{74.19}$$

Воспользовавшись соотношением (73.19), мы можем также написать

$$3I = -\int\limits_{(a)} (x_i - a_i)\,\rho\,\frac{\partial V_a}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{74.20}$$

Но из уравнения Ляпунова следует, в силу того, что Ω_a есть однородная квадратичная функция от разностей $x_i - a_i$,

$$(x_i - a_i)\frac{\partial V_a}{\partial x_i} = (x_i - a_i)\frac{\partial u_a}{\partial x_i} + 2\Omega_a. \tag{74.21}$$

С другой стороны, согласно (71.18), мы имеем

$$\rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k}. \tag{74.22}$$

Подставляя (74.21) в (74.20) и пользуясь (74.22), будем иметь:

$$3I = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int (x_i - a_i) \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 - 2 \int \rho \Omega_a (dx)^3. \tag{74.23}$$

Интегрируя по частям и пользуясь выражениями (74.03) и (74.13) для T_a и ε_a, получим окончательно

$$3 \int\limits_{(a)} p\,(dx)^3 = \varepsilon_a - 2T_a. \tag{74.24}$$

Эта формула показывает, что, когда тело вращается, среднее давление внутри него будет меньше, чем при отсутствии вращения, что и следовало ожидать.

Аналогично получается соотношение

$$2 \int\limits_{(a)} p \cdot (x_i - a_i)\,(dx)^3 = \eta_{ai} - T_{ai}, \tag{74.25}$$

где

$$\eta_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma} \int\limits_{\infty} \left\{ (x_k - a_k)\, q_{ik}^{(a)} + (x_i - a_i)\, q_{kk}^{(a)} \right\} (dx)^3, \tag{74.26}$$

или, в обозначениях (74.16):

$$\eta_{ai} = \frac{1}{2} \left(B_{k,\,ik}^{(a)} + B_{i,\,kk}^{(a)} \right). \tag{74.27}$$

Формулы (74.15) и (74.16) дают представление величин $B_{kl}^{(a)}$ и $B_{i,\,kl}^{(a)}$ в виде интегралов по всему бесконечному объему, но их можно также представить в виде интегралов по объему, занятому массой (a). Чтобы произвести это преобразование, введем функцию w_a, определяемую равенством

$$w_a = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{(a)} \rho' \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \, (dx')^3, \tag{74.28}$$

в силу которого

$$\Delta w_a = u_a. \tag{74.29}$$

Тогда нетрудно доказать равенство

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k} (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3, \tag{74.30}$$

откуда вследствие (74.11)

$$B_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \rho \left(\frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta w_a - \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k}\right)(dx)^3. \qquad (74.31)$$

Здесь интеграл распространен уже только по объему массы (a).

Подставляя в (74.31) выражение (74.28) для w_a в виде интеграла и выполняя дифференцирование, можем также написать:

$$B_{ik}^{(a)} = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{(a)}\int \rho\rho' \frac{(x_i - x_i')(x_k - x_k')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}(dx)^3(dx')^3. \qquad (74.32)$$

Аналогично формуле (74.31), которую можно написать в виде

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k}(dx)^3 = \varepsilon_a \delta_{ik} - B_{ik}^{(a)}, \qquad (74.33)$$

доказывается и формула

$$\int\limits_{(a)} \rho \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k}(x_j - a_j)(dx)^3 = \varepsilon_{aj}\delta_{ik} - B_{j,ik}^{(a)}. \qquad (74.34)$$

Эти соотношения также будут нужны в дальнейшем.

В заключение заметим, что вследствие соотношения (74.22) и уравнений движения (73.04) деленную на $4\pi\gamma$ величину $q_{ik}^{(a)}$ можно толковать, в рамках ньютоновой теории, как тензор напряжений гравитационного поля массы (a).

§ 75. Преобразование уравнений движения, написанных в интегральной форме

Мы будем исходить из уравнений движения в интегральной форме, приведенных в начале § 73. Выпишем эти уравнения еще раз, учитывая, что, согласно (73.18), напряжения сводятся к изотропному давлению p. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \left\{\rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2}pv_i\right\}(dx)^3 =$$

$$= \int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}\right](dx)^3 +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\rho v_k (dx)^3, \qquad (75.01)$$

причем

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}\right], \qquad (75.02)$$

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \qquad (75.03)$$