откуда вследствие (74.11)

$$B_{ik}^{(a)}=\int\limits_{(a)}\rho\left(\frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta w_a-\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)(dx)^3. \tag{74.31}$$

Здесь интеграл распространен уже только по объему массы (a).

Подставляя в (74.31) выражение (74.28) для w_a в виде интеграла и выполняя дифференцирование, можем также написать:

$$B_{ik}^{(a)}=\frac{\gamma}{2}\int\limits_{(a)}\int\rho\rho'\,\frac{(x_i-x_i')(x_k-x_k')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(dx)^3(dx')^3. \tag{74.32}$$

Аналогично формуле (74.31), которую можно написать в виде

$$\int\limits_{(a)}\rho\,\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial x_k}(dx)^3=\varepsilon_a\delta_{ik}-B_{ik}^{(a)}, \tag{74.33}$$

доказывается и формула

$$\int\limits_{(a)}\rho\cdot\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial x_k}(x_j-a_j)(dx)^3=\varepsilon_{aj}\delta_{ik}-B_{j,ik}^{(a)}. \tag{74.34}$$

Эти соотношения также будут нужны в дальнейшем.

В заключение заметим, что вследствие соотношения (74.22) и уравнений движения (73.04) деленную на $4\pi\gamma$ величину $q_{ik}^{(a)}$ можно толковать, в рамках ньютоновой теории, как тензор напряжений гравитационного поля массы (a).

§ 75. Преобразование уравнений движения, написанных в интегральной форме

Мы будем исходить из уравнений движения в интегральной форме, приведенных в начале § 73. Выпишем эти уравнения еще раз, учитывая, что, согласно (73.18), напряжения сводятся к изотропному давлению p. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\rho v_i\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right]+\frac{1}{c^2}pv_i\right\}(dx)^3=$$
$$=\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)+\frac{3p}{c^2}\right](dx)^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\rho v_k(dx)^3, \tag{75.01}$$

причем

$$\Delta U^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}=-4\pi\gamma\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)+\frac{3p}{c^2}\right], \tag{75.02}$$

$$\Delta U_i=-4\pi\gamma\rho v_i \tag{75.03}$$

Положим здесь для краткости

$$\sigma = \rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}, \tag{75.04}$$

так что вместо (75.02) можно писать

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{75.05}$$

Пренебрегая малыми величинами, мы получим из (75.01):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\rho v_i\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2}pv_i\right\}(dx)^3 =$$

$$= \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 -$$

$$- \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_k\frac{\partial U_k}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{75.06}$$

Заметим прежде всего, что

$$\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 = \frac{4}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho U_i(dx)^3 \tag{75.07}$$

так что этот член может быть перенесен в левую часть и внесен под знак производной по времени.

Рассмотрим теперь первый член правой части (75.06); он является обобщением вычисленного в § 71 выражения (71.11), соответствующего ньютонову приближению. Разлагая, подобно (71.10), потенциал U^* на внутренний и внешний

$$U^* = \overset{*}{u}_a + U^{*(a)}, \tag{75.08}$$

мы будем иметь

$$\int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \int\limits_{(a)}\frac{\partial \overset{*}{u}_a}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma(dx)^3. \tag{75.09}$$

В ньютоновом приближении первый член справа равнялся бы, согласно (71.19), нулю, как равнодействующая внутренних гравитационных сил. В релятивистском же приближении, когда уравнение Пуассона заменяется уравнением (75.03), это уже будет не так, вследствие запаздывания. Подставляя в рассматриваемый интеграл величину σ из уравнения

$$\Delta\overset{*}{u}_a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overset{*}{u}_a}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{75.10}$$

справедливого внутри массы (a), и учитывая, что интеграл от члена, содержащего оператор Лапласа, равен нулю, получим

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2} (dx)^3 \tag{75.11}$$

или

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_a^*}{\partial t} (dx)^3, \tag{75.12}$$

так как

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial u_a^*}{\partial t} (dx)^3 = 0. \tag{75.13}$$

Вследствие малого множителя перед интегралом, мы можем в правой части (75.12) заменить величину u_a^* ньютоновым потенциалом u_a, после чего формула (75.12) напишется

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial t} (dx)^3. \tag{75.14}$$

Вводя, согласно (74.28), величину w_a, связанную с u_a соотношением

$$\Delta w_a = u_a, \tag{75.15}$$

можно преобразовать интеграл в правой части уравнения (75.14) и написать это уравнение в виде

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \tag{75.16}$$

Последнюю формулу можно было бы вывести и более прямым путем. подставив в интеграл слева приближенное решение уравнения (75.10).

Таким образом, первый член правой части (75.06) можно представить в виде

$$\int\limits_{a} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \tag{75.17}$$

Сделаем здесь еще одно преобразование. Введем функцию

$$W = \frac{1}{2} \gamma \int\limits_{(\infty)} \rho' \,|\, \mathbf{r} - \mathbf{r}' \,|\, (dx')^3, \tag{75.18}$$

представляющую решение уравнения

$$\Delta W = U, \tag{75.19}$$

где U есть ньютонов потенциал. Из сравнения (74.28) с (75.18) очевидно, что

$$W = \sum_a w_a, \tag{75.20}$$

подобно тому как ньютонов потенциал есть сумма потенциалов отдельных масс

$$U = \sum_a u_a. \tag{75.21}$$

Разложению (71.10) ньютонова потенциала на внутренний и внешний соответствует разложение

$$W = w_a + W^{(a)}. \tag{75.22}$$

Применяя это разложение, можем написать вместо (75.17):

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3. \tag{75.23}$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к формуле (75.16), по отношению к совокупности всех рассматриваемых масс, мы приходим к формуле

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(\infty)} \rho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3, \tag{75.24}$$

откуда следует, что

$$\sum_a \left\{ \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 \right\} = 0. \tag{75.25}$$

Рассмотрим теперь последний член уравнения 75.06). Разделяя „вектор-потенциал“ U_k на внутренний и внешний

$$U_k = u_{ak} + U_k^{(a)}, \tag{75.26}$$

заключаем, аналогично предыдущему (см. § 71), что в силу уравнения Пуассона (75.03) будет:

$$\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial u_{ak}}{\partial x_i}(dx)^3 = 0 \tag{75.27}$$

и, следовательно, последний член в (75.06) будет равен

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i}(dx)^3 = -\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{75.28}$$

При этом будет

$$\int\limits_{(\infty)} \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{75.29}$$

Мы рассмотрели все члены правой части (75.06). Из них выражение (75.07) и последний член правой части (75.23), имеющие вид производной по времени, мы перенесем налево, после чего уравнения движения (75.06) примут вид

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \tag{75.30}$$

где

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{\rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2} p v_i - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{c^2} \rho U_i - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}\right\} (dx)^3 \tag{75.31}$$

и

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \tag{75.32}$$

В силу уравнений (75.25) — (75.29) будет

$$\sum_a F_{ai} = 0 \tag{75.33}$$

и, следовательно,

$$\sum_a P_{ai} \equiv P_i = \text{const}. \tag{75.34}$$

Величину P_{ai} можно, по аналогии с ньютоновой механикой, толковать как составляющую количества движения массы (a). Тогда величина F_{ai} будет составляющей силы, действующей на эту массу. Такое толкование, вполне естественное в ньютоновом приближении, является здесь, впрочем, несколько искусственным, поскольку количество движения P_{ai} зависит, согласно (75.31), не только от внутренней структуры тела и его скорости, но и от потенциалов U, U_i и W.

Выделим в выражении (75.31) для P_{ai} члены, зависящие только от внутренней структуры.

Из уравнений

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\rho; \qquad \Delta u_{ai} = -4\pi\gamma\rho v_i, \tag{75.35}$$

которым удовлетворяют внутри массы (a) величины u_a, u_{ai}, вытекает равенство

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i u_a (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho u_{ai} (dx)^3. \tag{75.36}$$

Используя это равенство, мы можем написать выражение для P_{ai} в виде

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{ \rho v_i + \frac{1}{c^2} \rho v_i \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - u_a \right) + \frac{1}{c^2} p v_i - \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} \right\} (dx)^3 +$$
$$+ \frac{3}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \qquad (75.37)$$

Здесь первый интеграл зависит только от движения и от внутренней структуры тела (a), тогда как остальные три зависят также и от потенциалов внешнего поля, т. е. от взаимодействия тела (a) с другими телами. Вычислением этих интегралов мы займемся в следующем параграфе.

§ 76. Вычисление количества движения во втором приближении

В предыдущем параграфе мы привели уравнения движения к виду

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \qquad (76.01)$$

где количество движения P_{ai} и сила F_{ai} выражены в виде интегралов (75.31) и (75.32). Нам надлежит вычислить эти интегралы и выразить их через параметры, характеризующие движение тел как целых.

Для вычисления P_{ai} воспользуемся представлением этой величины в виде (75.37). Сообразно разложению количества движения на собственное и происходящее от взаимодействия, напишем

$$P_{ai} = (P_{ai})_{\text{собств}} + (P_{ai})_{\text{взаим}}, \qquad (76.02)$$

$$(P_{ai})_{\text{собств}} = \int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} v_i \left(\frac{\rho}{2} v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + p \right) (dx)^3 -$$
$$- \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3, \qquad (76.03)$$

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{3}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \qquad (76.04)$$

Вычислим сперва интегралы, входящие в (76.03). Первый из них дает количество движения в ньютоновом приближении; он равен

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \dot{a}_i \qquad (76.05)$$