Используя это равенство, мы можем написать выражение для P_{ai} в виде

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{\rho v_i + \frac{1}{c^2}\rho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - u_a\right) + \frac{1}{c^2}pv_i - \frac{\rho}{c^2}\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial t}\right\}(dx)^3 +$$
$$+ \frac{3}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)}(dx)^3 - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)}(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3. \qquad (75.37)$$

Здесь первый интеграл зависит только от движения и от внутренней структуры тела (a), тогда как остальные три зависят также и от потенциалов внешнего поля, т. е. от взаимодействия тела (a) с другими телами. Вычислением этих интегралов мы займемся в следующем параграфе.

§ 76. Вычисление количества движения во втором приближении

В предыдущем параграфе мы привели уравнения движения к виду

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \qquad (76.01)$$

где количество движения P_{ai} и сила F_{ai} выражены в виде интегралов (75.31) и (75.32). Нам надлежит вычислить эти интегралы и выразить их через параметры, характеризующие движение тел как целых.

Для вычисления P_{ai} воспользуемся представлением этой величины в виде (75.37). Сообразно разложению количества движения на собственное и происходящее от взаимодействия, напишем

$$P_{ai} = (P_{ai})_{\text{собств}} + (P_{ai})_{\text{взаим}}, \qquad (76.02)$$

$$(P_{ai})_{\text{собств}} = \int\limits_{(a)} \rho v_i(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} v_i\left(\frac{\rho}{2}v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + p\right)(dx)^3 -$$
$$- \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3, \qquad (76.03)$$

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{3}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)}(dx)^3 - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)}(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3. \qquad (76.04)$$

Вычислим сперва интегралы, входящие в (76.03). Первый из них дает количество движения в ньютоновом приближении; он равен

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i(dx)^3 = M_a\dot{a}_i \qquad (76.05)$$

в согласии с (71.08). При вычислении второго интеграла мы будем иметь в виду вытекающее из (73.26) и (74.02) соотношение

$$\rho\Pi - \rho u_a + p = \rho\Omega_a, \tag{76.06}$$

а также формулу

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \dot{a}_k^2 + \dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} (x_j - a_j) + \Omega_a, \tag{76.07}$$

которая следует из выражения

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)} (x_j - a_j) \tag{76.08}$$

для скорости внутри тела (a). Второй интеграл будет равен

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i \left(\frac{1}{2} v^2 + \Omega_a\right) (dx)^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2\right) \cdot \dot{a}_i + 2T_a \dot{a}_i + \omega_{ri}^{(a)} \omega_{sk}^{(a)} I_{rs}^{(a)} \dot{a}_k + 2\omega_{ji}^{(a)} T_{aj}, \tag{76.09}$$

если воспользоваться обозначениями (74.03) и (74.05). Последний интеграл в (76.03) может быть преобразован к виду

$$-\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3. \tag{76.10}$$

Применяя затем формулы (74.33) и (74.34), получим

$$-\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 = \varepsilon_a \dot{a}_i - B_{ik}^{(a)} \dot{a}_k + \omega_{ji}^{(a)} \varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)} B_{j,ik}^{(a)}. \tag{76.11}$$

Собирая все три интеграла вместе и вводя обозначения

$$Z_{ik}^{(a)} = (2T_a + \varepsilon_a) \delta_{ik} + \omega_{ri}^{(a)} \omega_{sk}^{(a)} I_{rs}^{(a)} - B_{ik}^{(a)}, \tag{76.12}$$

$$Z_i^{(a)} = 2\omega_{ji}^{(a)} T_{aj} + \omega_{ji}^{(a)} \varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)} B_{j,ik}^{(a)}, \tag{76.13}$$

получим для „собственной" части количества движения выражение

$$(P_{ai})_{\text{собств}} = M_a \dot{a}_i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2\right) \dot{a}_i + \frac{1}{c^2} (Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_k + Z_i^{(a)}). \tag{76.14}$$

Здесь первый член представляет, как мы уже отмечали, ньютоново выражение для количества движения. Второй член дает известную из механики материальной точки добавку к нему. Последний член можно толковать на основе понятия о тензоре эффективной массы (матрица коэффициентов при составляющих скорости в выражении для составляющих количества движения).

Если мы положим

$$K=\sum_a\left(\frac{1}{2}M_a\dot{a}_i^2+T_a\right)+$$
$$+\frac{1}{c^2}\sum_a\left[\frac{1}{8}M_a(\dot{a}_k^2)^2+\frac{1}{2}Z_{ik}^{(a)}\dot{a}_i\dot{a}_k+Z_i^{(a)}\dot{a}_i\right], \quad (76.15)$$

то мы будем, очевидно, иметь

$$(P_{ai})_{\text{соб}}=\frac{\partial K}{\partial \dot{a}_i}. \quad (76.16)$$

Этим уравнением величина K определяется с точностью до функции, не зависящей от $\dot{a}_i$. Мы добавили в (76.15) члены $\sum T_a$ для того, чтобы в нерелятивистском приближении величина K переходила в обычное выражение для кинетической энергии системы тел.

Заметим, что для невращающихся тел со сферической симметрией мы имеем

$$B_{ik}^{(a)}=\frac{1}{3}\varepsilon_a\delta_{ik};\quad Z_{ik}^{(a)}=\frac{2}{3}\varepsilon_a\delta_{ik};\quad Z_i^{(a)}=0. \quad (76.17)$$

Поэтому, если мы введем эффективную массу

$$m_a=M_a+\frac{2}{3c^2}\varepsilon_a, \quad (76.18)$$

то будет, с точностью до малых величин,

$$K=\sum_a\frac{1}{2}m_a\dot{a}_i^2+\frac{1}{c^2}\sum_a\frac{1}{8}m_a(\dot{a}_k^2)^2, \quad (76.19)$$

как для материальной точки. Формула (76.18) показывает, что тензор эффективной массы приводится, в данном случае, к скаляру.

Переходим к вычислению той части количества движения, которая зависит от взаимодействия. Оценим прежде всего порядок величины этой части. Нетрудно видеть, что все три члена в (76.04) будут иметь один и тот же порядок величины, а именно

$$(P_{ai})_{\text{взаим}}=O\left(M\frac{q^3}{c^2}\right), \quad (76.20)$$

где q — неоднократно использованная нами величина порядка скорости. При вычислении интегралов в (76.04) мы сохраним, помимо главных членов, которые будут только что указанного порядка, также и члены порядка L/R по отношению к главным; члены же более высокого порядка относительно L/R мы будем отбрасывать.

Для вычисления интегралов с требуемой точностью в выражении (71.27) для ньютонова потенциала достаточно сохранить первый член и писать

$$U^{(a)}(\mathbf{r})=\sum_b{}'\frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \quad (76.21)$$

В выражении

$$U_i^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \gamma \int\limits_{(b)} \rho' v_i' \frac{(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{76.22}$$

для вектор-потенциала следует сохранить, кроме главного, еще один член. Пользуясь формулой (71.25), получаем

$$U_i^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b \dot{b}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} - \sum_b{}' \gamma \omega_{ri}^{(b)} I_{rk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{76.23}$$

Наконец, функция

$$W^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{1}{2} \gamma \int\limits_{(b)} \rho' |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| (dx')^3 \tag{76.24}$$

с требуемой точностью будет равна

$$W^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b |\mathbf{r}-\mathbf{b}| + \frac{1}{4} \sum_b{}' \gamma I_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{76.25}$$

Мы сохранили здесь, помимо главного, еще один член, чтобы обеспечить надлежащую точность в выражении для производной от $W^{(a)}$ по времени.

Подставляя в первый из интегралов (76.04) разложение $U^{(a)}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора вблизи точки $x_k = a_k$

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = U^{(a)}(\mathbf{a}) + (x_k - a_k)\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a + \dots, \tag{76.26}$$

будем иметь

$$3 \int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)}(\mathbf{r}) (dx)^3 = 3 M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathbf{a}) + 3 \omega_{ji}^{(a)} I_{ji}^{(a)} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a. \tag{76.27}$$

Сюда нужно подставить выражение для ньютонова потенциала внешних масс из (76.21). Тогда получится

$$3 \int \rho v_i U^{(a)}(\mathbf{r}) (dx)^3 =$$
$$= \sum_b{}' \frac{3\gamma M_a M_b \dot{a}_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \sum_b{}' 3\gamma M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{76.28}$$

Аналогично вычисляется второй интеграл в (76.04). Мы имеем

$$-4\int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)}(\mathbf{r})(dx)^3 = -4M_a U_i^{(a)}(\mathbf{a}) \tag{76.29}$$

и после подстановки выражения (76.23) для $U_i^{(a)}$:

$$-4\int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)}(\mathbf{r})(dx)^3 =$$

$$= -\sum_b{}' \frac{4\gamma M_a M_b \dot{b}_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \sum_b{}' 4\gamma M_a \omega_{si}^{(b)} I_{sk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{76.30}$$

Наконец, последний интеграл в (76.04) равен

$$-\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\, \partial t}(dx)^3 = -M_a\left(\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\, \partial t}\right)_a. \tag{76.31}$$

Дифференцируя (76.25) по времени, получаем

$$\frac{\partial W^{(a)}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_j\, \partial x_k}. \tag{76.32}$$

Членами с третьими производными от $|\mathbf{r}-\mathbf{b}|$ мы должны здесь, с принятой точностью, пренебречь. Величина $\dot{I}_{jk}^{(b)}$ имеет, согласно (72.16), значение

$$\dot{I}_{jk}^{(b)} = \omega_{sj}^{(b)} I_{sk}^{(b)} + \omega_{sk}^{(b)} I_{sj}^{(b)}. \tag{76.33}$$

Дифференцируя (76.32), получаем

$$\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\, \partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k} \tag{76.34}$$

и, следовательно,

$$-\int \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\, \partial t}(dx)^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_a M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2 |\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i\, \partial a_k} - \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma M_a \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3 |\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i\, \partial a_j\, \partial a_k}. \tag{76.35}$$

Согласно (76.04), деленная на c^2 сумма выражений (76.28), (76.30) и (76.35) дает величину $(P_{ai})_{\text{взаим}}$.

Введем две функции, K_1 и K_2, из коих первая, K_1, однородна и квадратична в скоростях и однородна степени (-1) в координатах, а вторая, K_2, линейна и однородна в скоростях и однородна степени (-2) в координатах.

Положим

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} (3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i \dot{b}_i) + \\ + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \, \partial a_k} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|; \qquad (76.36)$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma \, [M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) - \\ - M_a \omega_{ji}^{(b)} I_{jk}^{(b)} (3\dot{b}_i - 4\dot{a}_i)] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \\ + \frac{1}{8c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma (M_b \dot{b}_j \dot{I}_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_j \dot{I}_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_j \, \partial a_k \, \partial a_l}. \qquad (76.37)$$

Тогда нетрудно проверить, что будет

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{\partial K_1}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{a}_i}. \qquad (76.38)$$

Имея в виду оценки

$$\omega \sim \frac{q}{L}; \qquad I \sim ML^2; \qquad \dot{I} \sim MqL, \qquad (76.39)$$

нетрудно заключить, что порядок величины функций K_1 и K_2 будет

$$K_1 \sim M \frac{q^4}{c^2}; \qquad K_2 \sim M \frac{q^4}{c^2} \cdot \frac{L}{R}. \qquad (76.40)$$

Таким образом, функция K_2 будет мала по сравнению с K_1.

Сопоставляя формулы (76.16) и (76.38), мы можем написать для полного количества движения выражение

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} (K + K_1 + K_2), \qquad (76.41)$$

где K, K_1 и K_2 имеют значения (76.15), (76.36) и (76.37).

§ 77. Вычисление силы

Для вычисления интегралов, входящих, согласно (75.32), в выражение для силы

$$F_{a_i} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho \, (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \, \partial t} (dx)^3 - \\ - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3, \qquad (77.01)$$