Положим

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} (3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i \dot{b}_i) +$$
$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \, \partial a_k} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|; \qquad (76.36)$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \gamma \left[ M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) - \right.$$
$$\left. - M_a \omega_{ji}^{(b)} I_{jk}^{(b)} (3\dot{b}_i - 4\dot{a}_i) \right] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} +$$
$$+ \frac{1}{8c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \gamma \left( M_b \dot{b}_j \dot{I}_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_j \dot{I}_{kl}^{(b)} \right) \frac{\partial^3 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \, \partial a_k \, \partial a_l}. \qquad (76.37)$$

Тогда нетрудно проверить, что будет

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{\partial K_1}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{a}_i}. \qquad (76.38)$$

Имея в виду оценки

$$\omega \sim \frac{q}{L}; \qquad I \sim ML^2; \qquad \dot{I} \sim MqL, \qquad (76.39)$$

нетрудно заключить, что порядок величины функций $K_1$ и $K_2$ будет

$$K_1 \sim M \frac{q^4}{c^2}; \qquad K_2 \sim M \frac{q^4}{c^2} \cdot \frac{L}{R}. \qquad (76.40)$$

Таким образом, функция $K_2$ будет мала по сравнению с $K_1$.

Сопоставляя формулы (76.16) и (76.38), мы можем написать для полного количества движения выражение

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} (K + K_1 + K_2), \qquad (76.41)$$

где $K$, $K_1$ и $K_2$ имеют значения (76.15), (76.36) и (76.37).

## § 77. Вычисление силы

Для вычисления интегралов, входящих, согласно (75.32), в выражение для силы

$$F_a = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho \, (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \, \partial t} (dx)^3 -$$
$$- \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3, \qquad (77.01)$$

нужно, прежде всего, найти с достаточной точностью потенциал $U^*$; что касается потенциалов $W$ и $U_k$, то для них достаточно уже найденного первого приближения [формулы (76.23) и (76.24)].

Согласно (75.05), потенциал $U^*$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma, \tag{77.02}$$

где величина $\sigma$ имеет значение

$$\sigma = \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho U + 3p\right) \tag{77.03}$$

и мало отличается от $\rho$. Если известен ньютонов потенциал $U$, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{77.04}$$

то обобщенный ньютонов потенциал $U^*$ получается из $U$ введением двух поправок: поправки на запаздывание и поправки от замены $\rho$ на $\sigma$. Последняя равна

$$U_{доб} = \gamma \int\limits_{(\infty)} \frac{(\sigma' - \rho')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}(dx')^3. \tag{77.05}$$

Что касается поправки на запаздывание, то она выражается через введенную ранее [формула (75.18)] функцию

$$W = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{(\infty)} \rho' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (dx')^3. \tag{77.06}$$

Таким образом, мы имеем

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + U_{доб}. \tag{77.07}$$

Займемся вычислением $U_{доб}$. Разность $\sigma - \rho$ мы напишем в виде

$$\sigma - \rho = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right) - \frac{1}{c^2}\rho U^{(a)}. \tag{77.08}$$

Первый член здесь зависит только от внутренней структуры тела $(a)$ и от его скорости, а второй — также и от внешнего потенциала. Используя равенства (76.06) и (76.07), мы будет иметь

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)(dx)^3 = \frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a, \tag{77.09}$$

где

$$\xi_a = \int\limits_{(a)} (4\rho\Omega_a + 2p)(dx)^3, \tag{77.10}$$

и для момента первого порядка

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)(x_i - a_i)(dx)^3 = 3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}, \quad (77.11)$$

где

$$\xi_{ai} = \int\limits_{(a)} (4\rho\Omega_a + 2p)(x_i - a_i)(dx)^3. \quad (77.12)$$

Входящие сюда интегралы вычислены в § 74, а именно

$$\xi_a = \frac{2}{3}\varepsilon_a + \frac{8}{3}T_a, \quad (77.13)$$

$$\xi_{ai} = \eta_{ai} + 3T_{ai}. \quad (77.14)$$

Отсюда получаем приближенно:

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 - \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)' \frac{(dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} =$$
$$= \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a\right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + (3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}) \frac{x_i - a_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}. \quad (77.15)$$

Далее, с требуемой точностью будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \frac{\rho' U^{(a)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}(dx')^3 = \frac{M_a U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \quad (77.16)$$

Сопоставляя найденные формулы, получим для величины (77.07) выражение

$$U_{\text{доб}} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 - M_a U^{(a)}(\mathbf{a}) + \xi_a\right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} +$$
$$+ \frac{\gamma}{c^2} \sum_a (3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}) \frac{x_i - a_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}. \quad (77.17)$$

В формулу (77.01) для силы, действующей на массу $(a)$, входит не весь потенциал $U^*$, а лишь та его часть, которая происходит от внешних масс.

Эта часть равна

$$U^{*(a)} = U^{(a)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial t^2} + U_{\text{доб}}^{(a)}, \quad (77.18)$$

где величины $U^{(a)}(\mathbf{r})$ и $W^{(a)}(\mathbf{r})$ были определены раньше (§ 75), а добавка $U^{(a)}_{\text{доб}}$ равна

$$U^{(a)}_{\text{доб}} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) + \xi_b\right) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \\ + \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' \left(3\dot{b}_k \omega^{(b)}_{jk} I^{(b)}_{ji} + \xi_{bi}\right) \frac{x_i - b_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}. \qquad (77.19)$$

Найденные значения потенциалов необходимо теперь подставить в выражение (77.01) для силы. Мы получим:

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)\,(dx)^3 + \\ + \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t^2} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t} (dx)^3 - \\ - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U^{(a)}_k}{\partial x_i} (dx)^3. \qquad (77.20)$$

Здесь первый интеграл есть ньютоново выражение для силы; он уже вычислен нами в § 71. Мы имеем, согласно (71.33),

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \qquad (77.21)$$

где $\Phi$ есть ньютонова потенциальная энергия системы тел [формула (71.32)]. Второй интеграл, с требуемой точностью, будет равен

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i}\right)_a, \qquad (77.22)$$

где под $U^{(a)}_{\text{доб}}$ можно разуметь выражение (77.19). Третий интеграл может быть вычислен при помощи формул (77.08) — (77.14). Мы получим:

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_a \left(3\dot{a}_k \omega^{(a)}_{sk} I^{(a)}_{sj} + \xi_{aj}\right) - \frac{1}{c^2} M_a \left(U^{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a, \qquad (77.23)$$

где в качестве $U^{(a)}$ достаточно взять выражение (76.21).

Составим сумму выражений (77.22) и (77.23) и представим ее в виде производной по $a_i$. В формулу (77.23) мы можем подставить $x_i = a_i$ до дифференцирования. В формуле же (77.22) мы должны учесть, что один из членов в $U^{(b)}(\mathbf{b})$ сам зависит от $a_i$, а именно

$$U^{(b)}(\mathbf{b}) = \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \ldots, \tag{77.24}$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие $a_i$. Вследствие (77.24) мы имеем

$$U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ U^{(b)}(\mathbf{b}) \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2} \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} \right\}. \tag{77.25}$$

Используя это соотношение, мы получим

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho\, (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)(dx)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i}(L_1 + L_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial a_i}, \tag{77.26}$$

где мы положили

$$L_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} [3\gamma M_a M_b (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) + 2\gamma (\xi_b M_a + \xi_a M_b)] \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{77.27}$$

$$L_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} [3\gamma M_a \omega_{sk}^{(b)} I_{sj}^{(b)} \dot{b}_k - 3\gamma M_b \omega_{sk}^{(a)} I_{sj}^{(a)} \dot{a}_k + \gamma (M_a \xi_{bj} - M_b \xi_{aj})] \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}, \tag{77.28}$$

а функция $\Psi$ равна

$$\Psi = \frac{1}{c^2} \sum_b \left( \gamma M_a M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{M_a^2 M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} \right) + \frac{1}{2c^2} M_a U^{(a)}(\mathbf{a})^2 + \ldots, \tag{77.29}$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от $a_i$. Эти члены мы подберем так, чтобы функция $\Psi$ была симметрична относительно всех масс и соответствующих радиусов-векторов. Положим

$$\Psi(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\gamma^2}{2c_0^2} \cdot \frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2}, \tag{77.30}$$

$$\Psi(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \frac{\gamma^2}{c_0^2} M_a M_b M_c \left( \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}-\mathbf{c}|} + \frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c}-\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}-\mathbf{b}|} \right) \tag{77.31}$$

(где $c_0$ есть временное обозначение для скорости света, которое мы ввели во избежание смешения с индексом при массе $M_c$). Тогда нетрудно видеть, что в функции

$$\Psi=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b})+\frac{1}{6}\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\(a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a)}}\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}),\tag{77.32}$$

члены, зависящие от $a_i$, будут те же, что в (77.29). Таким образом, в формуле (77.26) для суммы двух интегралов можно понимать под $\Psi$ выражение (77.32). Члены $\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c})$ дают своеобразное „тройное взаимодействие“ масс.

Рассмотрим теперь в выражении (77.20) те интегралы, которые содержат функцию $W^{(a)}$. Мы имеем, очевидно,

$$\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t^2}(dx)^3-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3=$$

$$=-\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3=-\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_j\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial t}(dx)^3.\tag{77.33}$$

Последнее выражение вычисляется при помощи формулы (76.34) для производной от $W^{(a)}$. Мы получим

$$-\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_j\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial t}(dx)^3=\frac{\partial L_3}{\partial a_i}+\frac{\partial L_4}{\partial a_i},\tag{77.34}$$

где

$$L_3=\frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\a\neq b}}\gamma M_a M_b\dot{a}_j\dot{b}_k\,\frac{\partial^2|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_j\,\partial a_k}\tag{77.35}$$

и

$$L_4=\frac{1}{8c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\gamma\,(M_b\dot{b}_j I_{kl}^{(a)}-M_a\dot{a}_j I_{kl}^{(b)})\,\frac{\partial^3|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_j\,\partial a_k\,\partial a_l}.\tag{77.36}$$

Нам остается рассмотреть последний интеграл в (77.20). Вычисление его никаких трудностей не представляет, и мы получаем

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_k\,\frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3=\frac{\partial L_5}{\partial a_i}+\frac{\partial L_6}{\partial a_i},\tag{77.37}$$

где

$$L_5=-\frac{2}{c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\frac{\gamma M_a M_b\,(\dot{a}_k\dot{b}_k)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|},\tag{77.38}$$

$$L_6=\frac{2}{c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\gamma\,(M_b\dot{b}_k\omega_{sk}^{(a)}I_{sj}^{(a)}-M_a\dot{a}_k\omega_{sk}^{(b)}I_{sj}^{(b)})\,\frac{a_j-b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}.\tag{77.39}$$

Собирая все интегралы вместе, получаем следующее выражение для силы:

$$F_{ai} = -\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} - \frac{\partial\Psi}{\partial a_i} + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_1 + L_3 + L_5) + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_2 + L_4 + L_6). \quad (77.40)$$

Сравним это выражение для силы с полученным ранее выражением (76.41) для количества движения. Положим

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \gamma(\xi_b M_a + \xi_a M_b) \cdot \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \quad (77.41)$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \gamma(\xi_{bj} M_a - \xi_{aj} M_b) \cdot \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3}. \quad (77.42)$$

Эти величины входят (со знаком минус) в состав выражений (77.27) и (77.28) для $L_1$ и $L_2$.

Нетрудно проверить, что мы имеем

$$L_1 + L_3 + L_5 = K_1 - \Phi_1 \quad (77.43)$$

и аналогично

$$L_2 + L_4 + L_6 = K_2 - \Phi_2, \quad (77.44)$$

где $K_1$ и $K_2$ имеют значения (76.30) и (76.31). Поэтому

$$F_{ai} = \frac{\partial}{\partial a_i}(K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi). \quad (77.45)$$

С другой стороны, согласно (76.41),

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i}(K + K_1 + K_2), \quad (77.46)$$

где $K$ есть выражение (76.15).

В этих формулах величина $K$ не зависит от координат $a_i$, величины же $\Phi$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Psi$ не зависят от скоростей $\dot{a}_i$. Положив

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi, \quad (77.47)$$

мы можем поэтому написать

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i}; \qquad F_{ai} = \frac{\partial L}{\partial a_i}, \quad (77.48)$$

и уравнения движения

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai} \quad (77.49)$$

принимают лагранжеву форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0. \quad (77.50)$$