§ 78. Уравнения поступательного движения в лагранжевой форме

В предыдущих параграфах были выведены уравнения движения центров тяжести масс, вытекающие из условий

$$\int\limits_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3 = 0, \tag{78.01}$$

которые, в свою очередь, получаются из условий гармоничности (см. § 70) Уравнения были выведены в предположении, что каждая масса вращается вокруг своего центра тяжести наподобие твердого тела.

Уравнения движения приводятся, как мы видели, к лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0, \tag{78.02}$$

где функция Лагранжа получается подстановкой в (77.47) найденных выше выражений для K, K_1, K_2, Φ, Φ_1, Φ_2, Ψ [формулы (76.15), (76.36), (76.37), (71.32), (77.41), (77.42), (77.32)] *).

Выпишем эти формулы еще раз. Мы имеем

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi, \tag{78.03}$$

где отдельные слагаемые имеют следующие значения:

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \sum_a \left(\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_i \dot{a}_k + Z_i^{(a)} \dot{a}_i\right). \tag{78.04}$$

Здесь первая сумма представляет обычную, ньютонову, кинетическую энергию поступательного и вращательного движения системы тел. (При составлении левой части уравнений Лагранжа член T_a, впрочем, не существен). Вторая сумма дает поправку к „кинетической“ (т. е. зависящей от скорости) части функции Лагранжа. При отсутствии вращения эта поправка сводится, согласно (76.19), к обычному поправочному члену, известному из механики материальной точки; при наличии же вращения эта поправка содержит также „смешанные“ члены, зависящие как от скорости поступательного движения, так и от угловой скорости вращения тела. От положения центров тяжести тел величина K не зависит.

---

*) Для не-вращающихся масс приведение к лагранжевой форме было впервые выполнено И. Фихтенгольцем [40].

Выпишем теперь значения K_1 и K_2. Согласно (76.36) и (76.37) мы имеем

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{a,b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} (3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i\dot{b}_i) + \\ + \frac{1}{4c^2} \sum_{a,b} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|, \tag{78.05}$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} [\gamma M_a \omega_{si}^{(b)} I_{sj}^{(b)} (3\dot{b}_i - 4\dot{a}_i) - \\ - \gamma M_b \omega_{si}^{(a)} I_{sj}^{(a)} (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i)] \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} + \\ + \frac{1}{8c^2} \sum_{a,b} (\gamma M_b \dot{b}_i \dot{I}_{kl}^{(a)} - \gamma M_a \dot{a}_i \dot{I}_{kl}^{(b)}) \cdot \frac{\partial^3 |\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l}. \tag{78.06}$$

Эти члены зависят как от координат, так и от скоростей и представляют как бы результат взаимодействия кинетической и потенциальной энергии. При этом, как мы уже заметили в § 76, величина K_1 однородна и квадратична в скоростях $\dot{a}_i$ поступательного движения, а величина K_2 билинейна в скоростях поступательного движения и в угловых скоростях.

Следующий член в функции Лагранжа

$$-\Phi = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{4} \sum_{a,b} (M_a I_{ik}^{(b)} + M_b I_{ik}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{78.07}$$

представляет ньютонову потенциальную энергию системы тел. К нему присоединяются две поправки, Φ_1 и Φ_2, где, согласно (77.41) и (77.42),

$$-\Phi_1 = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} \gamma (\xi_b M_a + \xi_a M_b) \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{78.08}$$

$$-\Phi_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} \gamma (\xi_{bj} M_a - \xi_{aj} M_b) \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}. \tag{78.09}$$

Величина Φ_1 может быть истолкована как результат замены в ньютоновой потенциальной энергии Φ или, точнее, в ее главном члене *)

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{78.10}$$

---

*) В формуле (78.07) для Φ поправочный член — порядка L^2/R^2 по отношению к главному, вследствие чего релятивистские поправки в поправочном члене будут такого порядка, каким мы уже пренебрегаем. Поэтому безразлично, вводить ли их в полное выражение для Φ или только в главный член Φ_0.

массы M_a на эффективную массу $M_a + \delta M_a$, где

$$\delta M_a = \frac{1}{c^2} \xi_a. \tag{78.11}$$

Величина же Φ_2 может быть истолкована как результат смещения центра тяжести массы (a), а именно замены a_i на $a_i + \delta a_i$, где

$$\delta a_i = \frac{1}{c^2 M_a} \xi_{ai}. \tag{78.12}$$

Действительно, мы имеем, с точностью до малых величин,

$$-\frac{1}{2} \sum_{a, b} \frac{\gamma (M_a + \delta M_a)(M_b + \delta M_b)}{|\mathbf{a} + \delta\mathbf{a} - \mathbf{b} - \delta\mathbf{b}|} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2. \tag{78.13}$$

Заметим, что входящая в формулу для эффективной массы величина ξ_a равна собственной энергии тела (a), которая слагается из кинетической энергии вращения вокруг его центра тяжести, из упругой энергии тела и из гравитационной энергии составляющих его частиц. В самом деле, можно показать, что выражение

$$\xi_a = T_a + \int\limits_{(a)} \rho \Pi (dx)^3 - \frac{1}{2} \int\limits_{(a)} \rho u_a (dx)^3 \tag{78.14}$$

для собственной энергии переходит, при использовании уравнения Ляпунова и соотношения (73.26), в формулу (77.10) для ξ_a.

Следует ожидать, что весомость собственной энергии тела влечет за собой не только изменение его эффективной массы, но и смещение его центра тяжести. Однако, ввиду того, что кинетическая энергия вращения тела вокруг его центра тяжести относится ко всему телу в целом и не связана с отдельными его частицами, для величины смещения центра тяжести трудно указать априори надлежащее выражение. Вычисление же дает для него величину (78.12), где ξ_{ai} имеет значение (77.12).

Нам остается выписать последний член в функции Лагранжа. Входящие в него три (различных) радиуса-вектора удобно обозначать буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; поэтому для скорости света мы примем использованное в § 77 обозначение c_0. Согласно формулам (77.30), (77.31) и (77.32), мы имеем

$$-\Psi = -\frac{\gamma^2}{4c_0^2} \sum_{a, b} \frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2} - \frac{\gamma^2}{6c_0^2} \sum_{a, b, c} M_a M_b M_c \times$$
$$\times \left(\frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} - \mathbf{c}|} + \frac{1}{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|\,|\mathbf{b} - \mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c} - \mathbf{a}|\,|\mathbf{c} - \mathbf{b}|} \right). \tag{78.15}$$

Здесь последняя сумма дает тройное взаимодействие масс.*) Если,

*) В тройной сумме значки удовлетворяют неравенствам $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$; во всех двойных суммах должно быть $a \neq b$.

как мы это делали выше, называть члены $K_1 + K_2$ „кинетически-потенциальной" частью функции Лагранжа, то можно величину Ψ называть „потенциально-потенциальной" ее частью. Эти названия подчеркивают то обстоятельство, что во втором приближении теории тяготения Эйнштейна уже не имеет место характерная для ньютоновой теории аддитивность кинетической и потенциальной части функции Лагранжа.

Полная функция Лагранжа, согласно (78.03), равна сумме выписанных здесь выражений (78.04)—(78.09) и (78.15). Она дает, с принятой степенью точности, уравнения поступательного движения с релятивистскими поправками.

Что касается уравнений вращательного движения, то они могут быть получены из соотношений (70.28), которые имеют вид

$$-\int\limits_{(a)} g\,(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3 = 0. \tag{78.16}$$

В ньютоновом приближении эти соотношения дают, как показано в § 72, закон изменения момента количества движения

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \tag{78.17}$$

каждого тела, а именно

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b \frac{3\gamma M_b (a_j - b_j)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^5} \left[(a_k - b_k) I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i) I_{kj}^{(a)}\right] \tag{78.18}$$

[формулы (72.07) и (72.13)].

Релятивистские поправки к ньютоновым уравнениям вращательного движения могут быть получены путем более точного вычисления левой части соотношений (78.16). Эти вычисления могут быть проведены по образцу тех, какие были проделаны в предыдущих параграфах для поступательного движения, и не представляют иных затруднений, кроме сложности выкладок. Но так как релятивистские поправки к вращательному движению небесных тел играют совершенно незначительную роль и еще труднее наблюдаемы, чем поправки к их поступательному движению, мы их здесь вычислять не будем.

§ 79. Интегралы уравнений движения системы тел

Подобно системе частиц, взаимодействующих через посредство электромагнитного поля (§§ 26—28), система тяжелых тел обладает тем свойством, что ее уравнения движения допускают десять классических интегралов (констант движения), а именно: интегралы количества движения и энергии и затем интегралы момента количества движения и движения центра инерции.

Мы выведем здесь общие выражения для констант движения в виде определенных интегралов. При этом мы будем здесь (как и