как мы это делали выше, называть члены $K_1 + K_2$ „кинетически-потенциальной“ частью функции Лагранжа, то можно величину Ψ называть „потенциально-потенциальной“ ее частью. Эти названия подчеркивают то обстоятельство, что во втором приближении теории тяготения Эйнштейна уже не имеет место характерная для ньютоновой теории аддитивность кинетической и потенциальной части функции Лагранжа.

Полная функция Лагранжа, согласно (78.03), равна сумме выписанных здесь выражений (78.04)—(78.09) и (78.15). Она дает, с принятой степенью точности, уравнения поступательного движения с релятивистскими поправками.

Что касается уравнений вращательного движения, то они могут быть получены из соотношений (70.28), которые имеют вид

$$-\int\limits_{(a)} g\,(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})\,(dx)^3 = 0. \tag{78.16}$$

В ньютоновом приближении эти соотношения дают, как показано в § 72, закон изменения момента количества движения

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \tag{78.17}$$

каждого тела, а именно

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b \frac{3\gamma M_b\,(a_j - b_j)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^5} \left[(a_k - b_k)\,I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i)\,I_{kj}^{(a)}\right] \tag{78.18}$$

[формулы (72.07) и (72.13)].

Релятивистские поправки к ньютоновым уравнениям вращательного движения могут быть получены путем более точного вычисления левой части соотношений (78.16). Эти вычисления могут быть проведены по образцу тех, какие были проделаны в предыдущих параграфах для поступательного движения, и не представляют иных затруднений, кроме сложности выкладок. Но так как релятивистские поправки к вращательному движению небесных тел играют совершенно незначительную роль и еще труднее наблюдаемы, чем поправки к их поступательному движению, мы их здесь вычислять не будем.

§ 79. Интегралы уравнений движения системы тел

Подобно системе частиц, взаимодействующих через посредство электромагнитного поля (§§ 26—28), система тяжелых тел обладает тем свойством, что ее уравнения движения допускают десять классических интегралов (констант движения), а именно: интегралы количества движения и энергии и затем интегралы момента количества движения и движения центра инерции.

Мы выведем здесь общие выражения для констант движения в виде определенных интегралов. При этом мы будем здесь (как и в начале § 71) пользоваться, для внутренней задачи, общими уравнениями движения упругого тела в нерелятивистском приближении. Выпишем их здесь еще раз. Мы имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i}=0, \tag{79.01}$$

собственно уравнения движения

$$\rho w_i-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \tag{79.02}$$

где ускорение w_i равно

$$w_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{79.03}$$

и, наконец, соотношение для упругой потенциальной энергии П

$$\rho\frac{d\Pi}{dt}=\frac{1}{2}p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{79.04}$$

Предположения, что каждое тело вращается, как твердое, мы пока вводить не будем.

Для получения констант движения можно исходить из тех соотношений, которые вытекают, как показано в § 70, из условий гармоничности. А именно, соотношение

$$-\int\limits_{(+\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3=0, \tag{79.05}$$

проинтегрированное по времени, дает нам три интеграла количества движения, а соотношение

$$-\int\limits_{(\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3=0, \tag{79.06}$$

также проинтегрированное по времени, дает интеграл энергии. Аналогично, соотношения

$$-\int\limits_{(\infty)} g\,(x_i\nabla_\alpha T^{\alpha k}-x_k\nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3=0 \tag{79.07}$$

дадут три интеграла момента количества движения, а соотношение

$$-\int\limits_{(\infty)} gx_i\nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3+x_0\int\limits_{(\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3=0 \tag{79.08}$$

[в котором, впрочем, равенство нулю второго члена вытекает уже из (79.05)] приведет к трем интегралам движения центра тяжести системы масс.

Начнем с вычисления количества движения. При выводе закона сохранения из (79.05) мы можем воспользоваться результатами § 75.

Обобщая несколько формулу (75.31), положим

$$P_i = \int\limits_{(\infty)} \left\{ \rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) \right] - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{c^2} \rho U_i - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} \right\} (dx)^3 \tag{79.09}$$

и составим производную от этого выражения по времени. На основании (73.01) получим прежде всего

$$\frac{dP_i}{dt} = \int \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3, \tag{79.10}$$

где

$$\sigma = \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{p_{kk}}{c^2}, \tag{79.11}$$

и функция U^* удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{79.12}$$

Но вследствие того, что все интегралы в (79.10) взяты по бесконечному объему, к ним применимы соотношения (75.24) и (75.29), согласно которым

$$\int \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} (dx)^3, \tag{79.13}$$

$$\int \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{79.14}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dP_i}{dt} = 0; \quad P_i = \text{const}, \tag{79.15}$$

так что P_i есть константа движения. Этот результат обобщает формулу (75.34) на общий случай системы упругих тел, взаимодействующих через посредство поля тяготения.

Переходим теперь к формулировке закона сохранения момента количества движения такой системы. Вводя в соотношение (79.07) выражение (70.22) для $g\nabla_\alpha T^{\alpha i}$ и используя формулы (70.26) для составляющих тензора массы, получим:

$$\frac{d}{dt} \int \left\{ \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) \right] (x_i v_k - x_k v_i) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c^2} (p_{jk} v_j x_i - p_{ji} v_j x_k) \right\} (dx)^3 =$$
$$= \int \left(x_i \frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \right) \sigma (dx)^3 + \frac{4}{c^2} \int \rho \left(x_i \frac{dU_k}{dt} - x_k \frac{dU_i}{dt} \right) (dx)^3 -$$
$$- \frac{4}{c^2} \int \rho v_j \left(x_i \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) (dx)^3, \tag{79.16}$$

где мы положили для краткости

$$\frac{dU_i}{dt}=\frac{\partial U_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \tag{79.17}$$

Если распространить в (79.16) все интегралы на область, занятую одной из масс, получится обобщение формулы (72.04), дающей закон изменения момента количества движения в ньютоновом приближении. Нас интересует здесь полный момент количества движения, поэтому интегралы должны быть распространены на все бесконечное пространство.

Введем обозначение

$$G_i=\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right]v_i-\frac{1}{c^2}p_{ij}v_j-\frac{4}{c^2}\rho U_i-\frac{1}{c^2}\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}, \tag{79.18}$$

при помощи которого формула (79.09) для полного количества движения напишется

$$P_i=\int G_i\,(dx)^3. \tag{79.19}$$

Тогда соотношение (79.16) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int(x_iG_k-x_kG_i)(dx)^3&=\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_k}\right)\rho\,(dx)^3-\\&-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_k\,\partial t}-x_k\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\right)(dx)^3-\\&-\frac{4}{c^2}\int\rho v_j\left(x_i\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho\,(v_iU_k-v_kU_i)\,(dx)^3.\end{aligned} \tag{79.20}$$

Докажем, что в правой части первые два интеграла сокращаются, а остальные два равны нулю в отдельности, так что вся правая часть равна нулю.

При вычислении интегралов в правой части мы будем применять следующую лемму:

Если функция ψ выражается через плотность μ по формуле

$$\psi=\int f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\mu(\mathbf{r}')(dx')^3, \tag{79.21}$$

где f есть некоторая функция от расстояния $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, то имеет место соотношение

$$\int\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\mu\,(dx)^3=0. \tag{79.22}$$

При этом предполагается, что формула (79.21) допускает дифференцирование под знаком интеграла. Для доказательства достаточно подставить значение производных от ψ из (79.21) в (79.22) и обратить внимание на то, что в получаемом двойном интеграле подынтегральная функция антисимметрична относительно координат обеих точек **r** и **r**′.

С аналогичным соотношением мы уже встречались при выводе формулы (71.14).

Припоминая формулу (77.07), мы можем написать

$$U^* = U_\sigma + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{79.23}$$

где $U_\sigma = U + U_{\text{доб}}$ есть решение уравнения

$$\Delta U_\sigma = -4\pi\gamma\sigma, \tag{79.24}$$

а второй член в (79.23), в котором функция W имеет значение

$$W = \frac{1}{2}\gamma\int\limits_{(\infty)}\rho' \, |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \, (dx')^3, \tag{79.25}$$

представляет поправку на запаздывание.

Рассмотрим первый интеграл в правой части (79.20). Согласно только что доказанной лемме,

$$\int\left(x_i\frac{\partial U_\sigma}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U_\sigma}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = 0. \tag{79.26}$$

Поэтому будет

$$\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\int\left(x_i\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_i}\right)\rho\,(dx)^3. \tag{79.27}$$

С другой стороны, доказанная лемма дает при

$$f = \frac{1}{2}\gamma\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|;\quad \mu = \frac{\partial\rho}{\partial t};\quad \psi = \frac{\partial W}{\partial t} \tag{79.28}$$

соотношение

$$\int\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}\,(dx)^3 = 0. \tag{79.29}$$

Используя его, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)(dx)^3 = \\ = \int\rho\left(x_i\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_i}\right)(dx)^3 \tag{79.30}$$

и, следовательно,

$$\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)(dx)^3, \tag{79.31}$$

так что первые два интеграла в правой части (79.20) действительно сокращаются.

Третий интеграл в правой части (79.20) равен нулю в силу доказанной леммы, в формулах которой нужно положить

$$f = \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad \mu = \rho v_j; \quad \psi = U_j. \tag{79.32}$$

Наконец, последний интеграл в (79.20) равен нулю в силу уравнения Пуассона для U_i. Таким образом, вся правая часть (79.20) равна нулю, и мы имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 = 0. \tag{79.33}$$

Если мы введем полный момент количества движения системы

$$M_{ik} = \int_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 \tag{79.34}$$

то мы будем иметь

$$M_{ik} = \text{const}. \tag{79.35}$$

Напомним, что в этих формулах величина G_i имеет значение (79.18) и мало отличается от плотности количества движения ρv_i.

Переходим теперь к формулировке закона сохранения энергии для системы тел. В отличие от других законов сохранения, соотношение (79.06) приводит, с принятой точностью вычислений, к формулировке этого закона лишь в ньютоновом приближении. Более точная форма закона сохранения может быть получена из рассмотрения лагранжевой формы уравнений для системы тел. Это будет сделано, для не-вращающихся масс, в следующем параграфе.

Ввиду того, что главные члены (ρ и ρv_i) в компонентах $c^2 T^{00}$ и $c^2 T^{0i}$ удовлетворяют уравнению неразрывности (79.01), соотношение (79.06), в данном приближении, дает то же, что и соотношение

$$c^2 \int \nabla_\alpha T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0. \tag{79.36}$$

Вводя сюда выражение (65.23) для расходимости, получаем

$$\frac{d}{dt} \int c^2 T^{00} (dx)^3 + \int \frac{\partial U}{\partial t} T^{00} (dx)^3 = 0 \tag{79.37}$$

и, используя значение (70.26) для T^{00},

$$\frac{d}{dt} \int \rho \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) \right\} (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \int \rho \frac{\partial U}{\partial t} (dx)^3 = 0. \tag{79.38}$$

Так как в отдельности

$$M^0 = \int \rho (dx)^3 = \text{const}, \tag{79.39}$$

то должно быть

$$\frac{d}{dt}\int \rho\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)(dx)^3+\int \rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3=0. \qquad (79.40)$$

Чтобы получить отсюда закон сохранения в узком смысле, нам нужно и второй интеграл в (79.40) представить в виде производной по времени. Это легко сделать, если учесть соотношение

$$\int\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3=0, \qquad (79.41)$$

которое вытекает из уравнения Пуассона для U. Вычитая из (79.40) деленное на 2 равенство (79.41) и полагая

$$E=\int \rho\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)(dx)^3, \qquad (79.42)$$

мы получаем

$$\frac{dE}{dt}=0; \quad E=\mathrm{const}. \qquad (79.43)$$

Интегралы от отдельных членов в (79.42) представляют кинетическую, упругую и гравитационную энергию системы тел в ньютоновом приближении.

Если не выделять из 79.38) члена (79.39) и положить

$$M=\int \rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3, \qquad (79.44)$$

мы будем также иметь

$$M=\mathrm{const}. \qquad (79.45)$$

Величина M есть полная масса системы тел. Она равна

$$M=M^0+\frac{E}{c^2}, \qquad (79.46)$$

где M^0 и E имеют значения (79.39) и (79.42).

Нам остается рассмотреть интегралы движения центра инерции системы тел. Их можно получить, исходя из соотношений (79.08) Это сводится к преобразованию выражения

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3=$$
$$=\int \rho v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right\}(dx)^3+\right.$$
$$+\frac{1}{c^2}\int x_i\rho v_j w_j(dx)^3+\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{d(\Pi-U)}{dt}(dx)^3 \qquad (79.47)$$

при помощи уравнений (79.01) — (79.04). Подставляя в (79.47) значение ρw_j из (79.02), получаем для суммы двух последних интегралов

$$\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\left\{v_j w_j+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{dU}{dt}\right\}(dx)^3=$$
$$=-\frac{1}{c^2}\int p_{ji}v_j\,(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3. \qquad (79.48)$$

Используя обозначение (79.18), мы можем записать результат подстановки (79.48) в (79.47) в виде

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3=$$
$$=\int G_i\,(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho v_i U\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int\rho U_i\,(dx)^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial t}(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3. \qquad (79.49)$$

Прибавляя сюда очевидное равенство

$$\frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int x_i\rho U\,(dx)^3=\frac{1}{2c^2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3, \qquad (79.50)$$

можем написать вместо (79.49)

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3=$$
$$=\int G_i\,(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho v_i U\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int\rho U_i\,(dx)^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3-\frac{1}{2c^2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3. \qquad (79.51)$$

Эта формула справедлива, когда область интегрирования охватывает одну или несколько масс. Если же интегрирование распространено на все бесконечное пространство, то в силу уравнений Пуассона для U и U_i будет

$$\int\rho v_i U\,(dx)^3=\int\rho U_i\,(dx)^3 \qquad (79.52)$$

и, кроме того,

$$\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial t}(dx)^3=\frac{1}{2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3. \qquad (79.53)$$

Последнее равенство проще всего проверить, заметив, что функция

$$Q_i=x_iU-2\frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (79.54)$$

удовлетворяет уравнению Пуассона вида

$$\Delta Q_i = -4\pi\gamma\rho x_i. \tag{79.55}$$

Вследствие (79.52) и (79.53), в правой части уравнения все интегралы, кроме первого, сокращаются, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 = \int G_i(dx)^3 = P_i, \tag{79.56}$$

где, согласно (79.15), P_i есть константа. Поэтому формула (79.56) может быть написана в проинтегрированном виде, а именно:

$$\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 - tP_i = K_i, \tag{79.57}$$

где K_i есть новая константа. Имея в виду постоянство полной массы M, определяемой формулой (79.44), мы можем ввести три величины X_i при помощи соотношений

$$MX_i = \int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3. \tag{79.58}$$

Эти величины можно толковать как координаты центра тяжести системы масс, а формулу (79.57), написанную в виде

$$MX_i - tP_i = K_i, \tag{79.59}$$

— как выражение закона движения центра тяжести. Исходное равенство (79.08) можно рассматривать как результат дифференцирования по времени соотношения (79.59).

§ 80. Дополнительные замечания к задаче о движении системы тел. Явная форма интегралов движения для случая невращающихся масс

В предыдущем параграфе были выведены интегралы движения системы тел в предположении, что внутри каждого тела выполняются нерелятивистские уравнения движения сплошной среды (79.01)—(79.04). Возникает вопрос, остаются ли в силе найденные интегралы движения, если считать уравнения движения сплошной среды выполненными внутри тел лишь приближенно (как в § 73) и взамен них потребовать лишь выполнения уравнений движения для тел, как целых. При этом, разумеется, нужно вернуться к предположению о том, что тела вращаются как твердые.

По отношению к количеству движения поставленный вопрос решается весьма просто. Полученные в §§ 75 и 77 уравнения движения