удовлетворяет уравнению Пуассона вида

$$\Delta Q_i = -4\pi\gamma\rho x_i. \tag{79.55}$$

Вследствие (79.52) и (79.53), в правой части уравнения все интегралы, кроме первого, сокращаются, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 = \int G_i(dx)^3 = P_i, \tag{79.56}$$

где, согласно (79.15), P_i есть константа. Поэтому формула (79.56) может быть написана в проинтегрированном виде, а именно:

$$\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 - tP_i = K_i, \tag{79.57}$$

где K_i есть новая константа. Имея в виду постоянство полной массы M, определяемой формулой (79.44), мы можем ввести три величины X_i при помощи соотношений

$$MX_i = \int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3. \tag{79.58}$$

Эти величины можно толковать как координаты центра тяжести системы масс, а формулу (79.57), написанную в виде

$$MX_i - tP_i = K_i, \tag{79.59}$$

— как выражение закона движения центра тяжести. Исходное равенство (79.08) можно рассматривать как результат дифференцирования по времени соотношения (79.59).

§ 80. Дополнительные замечания к задаче о движении системы тел. Явная форма интегралов движения для случая невращающихся масс

В предыдущем параграфе были выведены интегралы движения системы тел в предположении, что внутри каждого тела выполняются нерелятивистские уравнения движения сплошной среды (79.01)—(79.04). Возникает вопрос, остаются ли в силе найденные интегралы движения, если считать уравнения движения сплошной среды выполненными внутри тел лишь приближенно (как в § 73) и взамен них потребовать лишь выполнения уравнений движения для тел, как целых. При этом, разумеется, нужно вернуться к предположению о том, что тела вращаются как твердые.

По отношению к количеству движения поставленный вопрос решается весьма просто. Полученные в §§ 75 и 77 уравнения движения как раз и состояли в том, что величины

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} G_i (dx)^3 \tag{80.01}$$

удовлетворяли соотношению

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \tag{80.02}$$

где, согласно (75.33),

$$\sum_a F_{ai} = 0. \tag{80.03}$$

Поэтому постоянство величины

$$P_i = \int G_i (dx)^3 \tag{80.04}$$

есть следствие уравнений движения тел, как целых.

То же самое можно сказать относительно величин

$$M_{ik} = \int (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3, \tag{80.05}$$

представляющих момент количества движения системы. Уравнения вращательного движения были выписаны нами (в § 72) только в ньютоновом приближении. Но более точные уравнения, написанные для суммы орбитального и собственного момента количества движения, как раз и имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 = L_{ik}^{(a)}, \tag{80.06}$$

где $L_{ik}^{(a)}$ есть сумма интегралов, стоящих в правой части (79.20), но распространенных не на все бесконечное пространство, а лишь на область массы (a). При этом, как доказано в § 79, имеет место равенство

$$\sum_a L_{ik}^{(a)} = 0, \tag{80.07}$$

в силу которого постоянство величин M_{ik} есть следствие уравнений вращательного движения в форме (80.06).

Проверим теперь выполнение соотношения

$$\int\limits_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3 = 0. \tag{80.08}$$

Это соотношение должно быть выполнено для того, чтобы выполнялось соответствующее условие гармоничности. С другой стороны, если оно выполнено, то будет выполнено и соотношение (79.06), связанное с интегралом энергии.

Преобразования, которые привели нас от (79.06) к (79.38), применимы и в том случае, когда все интегралы распространены на область только одной массы. Поэтому мы можем сразу написать

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3+\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3=0, \quad (80.09)$$

а так как в отдельности

$$\int\limits_{(a)} \rho\,(dx)^3 = M_a = \text{const}, \quad (80.10)$$

то должно быть

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)(dx)^3+\int\limits_{(a)}\rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3=0. \quad (80.11)$$

Это соотношение выполняется в силу уравнений движения (79.01)—(79.04) для сплошной среды. Нам нужно показать, что оно будет приближенно выполнено и в том случае, если уравнения движения сплошной среды удовлетворяются лишь в среднем, и тело предполагается вращающимся наподобие твердого тела, но необязательно с постоянной угловой скоростью (см. § 73). В этом случае дело сводится к проверке соотношения

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i\left(w_i-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3=0, \quad (80.12)$$

получаемого из (80.11) после дифференцирования, при учете того, что упругая энергия остается постоянной. Здесь w_i есть ускорение, для которого в § 73 дано выражение (73.07); подинтегральная функция в (80.12) есть умноженная на v_i левая часть (73.08). Равенство (80.12) легко проверяется при помощи формулы

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i\left[\omega_{ji}^{(a)}-\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_a\right](x_j-a_j)\,(dx)^3=0, \quad (80.13)$$

которая может быть написана в виде

$$\frac{dT_a}{dt}=\frac{1}{2}I_{ij}^{(a)}\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a. \quad (80.14)$$

Эта формула совпадает с (72.32) и выполняется в силу уравнений вращательного движения тела. При проверке соотношения (80.11) можно также рассуждать следующим образом. Разделяя потенциал U на внутренний и внешний и используя уравнения (71.19) и (72.09), выражающие равенство нулю равнодействующей внутренних сил и их моментов, мы можем написать

$$\int \rho\frac{\partial u_a}{\partial t}(dx)^3=-\int \rho v_i\frac{\partial u_a}{\partial x_i}(dx)^3=0. \quad (80.15)$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho(\Pi - u_a)(dx)^3 = 0. \tag{80.16}$$

Поэтому уравнение (80.11) сводится к такому, в которое входит только внешний потенциал $U^{(a)}$, а именно к следующему:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 - U^{(a)}\right)(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}(dx)^3 = 0. \tag{80.17}$$

Подставляя сюда значение $U^{(a)}(\mathbf{r})$ из (71.27) и используя уравнения поступательного и вращательного движения (71.35) и (72.32), убеждаемся, что уравнение (80.17) выполняется.

Таким образом, необходимое для выполнения условий гармоничности соотношение (80.08) удовлетворяется уже в силу остальных соотношений вида (70.21), подобно тому, как в механике материальной точки уравнение, выражающее сохранение энергии, удовлетворяется в силу уравнений движения.

Аналогично можно проверить, что уравнений поступательного и вращательного движения достаточно для выполнения соотношения (79.51), а значит и для выполнения закона движения центра инерции.

Как мы уже упоминали в § 79, с принятой точностью вычислений интеграл энергии получается из (79.06) лишь в ньютоновом приближении. Но в случае не-вращающихся тел со сферической симметрией нетрудно написать интеграл энергии и в следующем приближении. Так как в этом случае движение сводится к поступательному, для которого уравнения уже написаны в лагранжевой форме, то для вывода интеграла энергии можно исходить из функции Лагранжа, рассмотренной в § 78. Вводя эффективную массу

$$m_a = M_a + \frac{2}{3}\varepsilon_a, \tag{80.18}$$

мы будем иметь, по формуле (78.03):

$$L = K + K_1 - \Phi - \Psi. \tag{80.19}$$

Здесь, согласно (76.19),

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{1}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2. \tag{80.20}$$

K имеет прежнее значение (78.05), в котором можно заменить массы M_a, M_b эффективными массами m_a, m_b:

$$K_1 = \frac{1}{4c^2}\sum_{a,b}\frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}(3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i\dot{b}_i) + \\ + \frac{1}{4c^2}\sum_{a,b}\gamma m_a m_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{80.21}$$

Φ есть ньютонова потенциальная энергия (с эффективными массами)

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{80.22}$$

Вследствие (78.13) это выражение включает в себя члены Φ_1 и Φ_2 (впрочем, ввиду сферической симметрии $\Phi_2 = 0$). Наконец, Ψ имеет прежнее значение (78.15), в котором также можно заменить массы их эффективными значениями:

$$\Psi = \frac{\gamma^2}{4c_0^2}\sum_{a,b}\frac{m_a m_b (m_a + m_b)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} + \frac{\gamma^2}{6c_0^2}\sum_{a,b,c} m_a m_b m_c \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{c}|} + \frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}-\mathbf{b}|}\right). \tag{80.23}$$

По формуле

$$\sum_a \dot{a}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - L = E \tag{80.24}$$

получаем интеграл энергии (в нерелятивистской нормировке):

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{3}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2 + K_1 + \Phi + \Psi. \tag{80.25}$$

Остальные интегралы движения также легко получаются из функции Лагранжа. Мы имеем интегралы количества движения

$$\sum_a P_{ai} = P_i, \tag{80.26}$$

где

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = \dot{a}_i\left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2}\sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{2c^2}\sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b (\dot{a}_i - \dot{b}_i)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2c^2}\sum_b{}' \gamma m_a m_b \dot{b}_k \frac{(a_i - b_i)(a_k - b_k)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}\right., \tag{80.27}$$

интегралы момента количества движения

$$\sum_a (a_i P_{ak} - a_k P_{ai}) = M_{ik} \tag{80.28}$$

и интегралы движения центра инерции *)

$$MX_i - P_i t = K_i = \text{const}, \tag{80.29}$$

*) Константы K_i не следует смешивать с величинами K_1 и K_2, входящими в функцию Лагранжа.

где

$$MX_i = \sum_a a_i\left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}\right), \tag{80.30}$$

причем

$$M = \sum_a \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2\right) - \frac{1}{2c^2} \sum_{a,\,b} \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \tag{80.31}$$

есть полная масса системы.

Более точное значение полной массы есть

$$M = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{80.32}$$

где E имеет значение (80.25).

§ 81. Задача двух тел конечной массы

В случае двух тел получаемые из функции Лагранжа (80.19) уравнения движения могут быть проинтегрированы. Здесь удобнее перейти к новым обозначениям, более употребительным в механике. В качестве индексов при массе мы будем писать не буквы a, b (обозначавшие у нас также координаты масс), а числа 1 и 2; координаты массы 1 будут теперь x_1, y_1, z_1, а координаты массы 2 будут x_2, y_2, z_2.

Мы будем употреблять также трехмерные векторные обозначения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В новых обозначениях функция Лагранжа напишется:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) + \\ & + \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \end{aligned} \tag{81.01}$$

а интеграл энергии примет вид:

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{3m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{3m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) - \\ & - \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}. \end{aligned} \tag{81.02}$$