где

$$MX_i = \sum_a a_i\left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right), \tag{80.30}$$

причем

$$M = \sum_a \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2\right) - \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{80.31}$$

есть полная масса системы.

Более точное значение полной массы есть

$$M = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{80.32}$$

где E имеет значение (80.25).

§ 81. Задача двух тел конечной массы

В случае двух тел получаемые из функции Лагранжа (80.19) уравнения движения могут быть проинтегрированы. Здесь удобнее перейти к новым обозначениям, более употребительным в механике. В качестве индексов при массе мы будем писать не буквы a, b (обозначавшие у нас также координаты масс), а числа 1 и 2; координаты массы 1 будут теперь x_1, y_1, z_1, а координаты массы 2 будут x_2, y_2, z_2.

Мы будем употреблять также трехмерные векторные обозначения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В новых обозначениях функция Лагранжа напишется:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) + \\ & + \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \end{aligned} \tag{81.01}$$

а интеграл энергии примет вид:

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{3m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{3m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)\left(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) - \\ & - \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}. \end{aligned} \tag{81.02}$$

Мы перепишем также в новых обозначениях формулу (80.27) для количества движения одной из масс. Составляющая $P_x^{(1)}$ равна

$$P_x^{(1)} = \dot{x}_1\left(m_1 + \frac{1}{2c^2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + \\ + \frac{7}{2c^2}\frac{\gamma m_1 m_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{2c^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)). \quad (81.03)$$

Количество движения другой массы получится отсюда перестановкой значков (1) и (2), а полное количество движения будет равно

$$P_x = P_x^{(1)} + P_x^{(2)}, \quad \text{и т. д.} \quad (81.04)$$

Выпишем одну из составляющих полного момента количества движения, например

$$M_{xy} = x_1 P_y^{(1)} - y_1 P_x^{(1)} + x_2 P_y^{(2)} - y_2 P_x^{(2)}. \quad (81.05)$$

Мы будем иметь:

$$M_{xy} = (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)\left(m_1 + \frac{1}{2c^2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{3}{c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + \\ + (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)\left(m_2 + \frac{1}{2c^2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{3}{c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) - \\ - \frac{7\gamma m_1 m_2}{2c^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}(x_1\dot{y}_2 - y_1\dot{x}_2 + x_2\dot{y}_1 - y_2\dot{x}_1) + \\ + \frac{\gamma m_1 m_2}{2c^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\big((\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\big)(x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (81.06)$$

Если мы введем координатную систему, связанную с центром инерции, то мы можем интегралы центра инерции написать в виде

$$m_1\mathbf{r}_1\left(1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + m_2\mathbf{r}_2\left(1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) = 0. \quad (81.07)$$

Введем теперь координаты центра инерции в ньютоновском смысле

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (81.08)$$

а также относительные координаты

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (81.09)$$

Мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + \frac{m_2}{m_0}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_0 - \frac{m_1}{m_0}\mathbf{r}, \end{aligned}\right\} \quad (81.10)$$

где

$$m_0 = m_1 + m_2 \quad (81.11)$$

есть полная масса. Мы введем также обозначение

$$m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{81.12}$$

для приведенной массы и заметим, что

$$m_0 m^* = m_1 m_2. \tag{81.13}$$

Мы имеем также

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 = m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + m^* \dot{\mathbf{r}}^2, \tag{81.14}$$

$$m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) =$$
$$= m_0 (x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0) + m^* (x \dot{y} - y \dot{x}), \tag{81.15}$$

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = x_0 y - x y_0. \tag{81.16}$$

Из формулы (81.07) непосредственно видно, что радиус-вектор ньютонова центра тяжести будет все время оставаться малым, причем скорость его изменения также будет мала. Если порядок величины $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ принять равным R и q, то будет

$$\mathbf{r}_0 \sim R \frac{q^2}{c^2}; \quad \dot{\mathbf{r}}_0 \sim \frac{q^3}{c^2}. \tag{81.17}$$

Поэтому во всех поправочных членах, содержащих в знаменателе c^2, мы можем положить вместо (81.10)

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_0} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_0} \mathbf{r}, \tag{81.18}$$

а также

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{m_0} \dot{\mathbf{r}}; \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_0} \dot{\mathbf{r}}. \tag{81.19}$$

Делая эти пренебрежения в самом уравнении (81.07), мы можем написать его в виде*)

$$m_0 \mathbf{r}_0 = \frac{(m_1 - m_2)}{2c^2 m_0} \mathbf{r} \left(m^* \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\gamma m^* m}{r} \right). \tag{81.20}$$

Отсюда можно заключить, что в случае финитных движений ньютонов центр тяжести $\mathbf{r}_0$ колеблется около своего среднего положения.

Перепишем интегралы энергии и момента количества движения в предположении малости $\mathbf{r}_0$. Даже в главных (ньютоновых) членах выражений (81.02) и (81.06) можно пренебречь величинами $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$, так как, согласно (81.14) и (81.15), они входят туда квадратично; это значит, что можно везде пользоваться значениями (81.18) и (81.19). Вводя эти значения в интеграл энергии (81.02) и разделив

*) Эта формула впервые получена в нашей работе 1941 г. [38].

результат на приведенную массу m^*, мы получим для величины

$$E_0 = \frac{E}{m^*} \tag{81.21}$$

выражение

$$E_0 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{8}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)(\dot{\mathbf{r}}^2)^2 + \frac{\gamma}{2r}(3m_0 + m^*)\dot{\mathbf{r}}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{2r^3}m^*(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2r^2}\right\}. \tag{81.22}$$

Введем теперь значения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в интеграл момента количества движения. Вследствие (81.16) и (81.20) последний член в (81.06) будет с большой точностью равен нулю, а остальные члены дают

$$\frac{1}{m^*}M_{xy} = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\}(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{81.23}$$

Аналогичные выражения получаются и для других составляющих момента количества движения. Из этих выражений видно, что в пространстве относительных координат x, y, z орбита будет плоской. Беря плоскость орбиты за плоскость xy, мы можем, как обычно, положить

$$z = 0; \quad \dot{z} = 0 \tag{81.24}$$

и ввести полярные координаты r, φ по формулам

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi. \tag{81.25}$$

Обозначая постоянную в левой части (81.23) буквой μ, мы будем иметь:

$$\mu = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\} r^2\dot{\varphi}. \tag{81.26}$$

Прежде чем идти дальше, сравним найденные здесь интегралы энергии и момента количества движения с теми, какие были получены в § 58 при исследовании движения бесконечно малой массы в поле большой или конечной массы. Мы должны ожидать, что при $m^* = 0$ формулы задачи двух тел перейдут в формулы задачи одного тела. Проверим это. Согласно формулам (58.26) — (58.31), мы имели в § 58 следующие соотношения:

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon = 1 + \frac{E_0}{c^2}, \tag{81.27}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu, \tag{81.28}$$

где

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right], \tag{81,29}$$

а величина α есть гравитационный радиус большой массы, который можно принять равным

$$\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2}. \tag{81.30}$$

Полагая

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{81.31}$$

мы можем приближенно написать вместо (81.29)

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \cdot \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{r}\right) v^2\right], \tag{81.32}$$

откуда

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{r+\alpha}{r-\alpha}} \left[1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{r}\right) v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4}\right] \tag{81.33}$$

и затем

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha} \frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\alpha}{2c^2 r} v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{\alpha^2}{2r^2}. \tag{81.34}$$

Вводя это выражение в (81.27) и заменяя величину α ее значением (81.30), получаем для E_0 значение

$$E_0 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{8} v^4 + \frac{3}{2} \frac{\gamma m_0}{r} v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2r^2}\right), \tag{81.35}$$

которое совпадет с даваемым формулой (81.22), если в этой последней положить $m^* = 0$.

Чтобы сравнить уравнения (81.26) и (81.28), выделим в последнем уравнении множитель $r^2 \dot{\varphi}$ и напишем его в виде

$$\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{dt}{d\tau} \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81.36}$$

Значение $\frac{dt}{d\tau}$ можно взять из (81.33), причем члены порядка v^4/c^4 можно отбросить. Тогда будет

$$\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{3\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2}. \tag{81.37}$$

Заменяя здесь гравитационный радиус α его значением (81.30) и подставляя в (81.38), получим

$$\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\gamma m_0}{c^2 r}\right) r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81.38}$$

Если в уравнении (81.26) положить $m^* = 0$, то оно совпадет с (81.38).

Таким образом, после перехода к пределу интегралы движения в задаче двух конечных масс действительно переходят в соответствующие интегралы уравнений геодезической линии, определяющей движение бесконечно малой массы в поле конечной массы. Заметим, что такое сравнение возможно только благодаря тому, что в обеих задачах мы пользовались одинаковыми, а именно гармоническими, координатами.

Продолжим теперь исследование уравнений движения двух конечных масс и найдем уравнение траектории относительного движения. Для квадрата скорости (81.31) мы сохраним обозначение v^2 вместо $\dot{\mathbf{r}}^2$. Если мы еще положим

$$u = \frac{1}{r}, \tag{81.39}$$

мы будем иметь тождество

$$v^2 = \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right), \tag{81.40}$$

откуда, после умножения на квадрат множителя при $r^2\dot{\varphi}$ в формуле (81.26),

$$v^2 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \frac{2\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\, v^2 = \mu^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right). \tag{81.41}$$

В левую часть мы можем подставить значение v^2 из интеграла энергии (81.22), в котором мы введем вместо $(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2$ выражение

$$(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2 = r^2 \cdot v^2 - \mu^2. \tag{81.42}$$

Формула (81.22) для E_0 напишется тогда:

$$E_0 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{3}{8c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \\ + \frac{\gamma}{2c^2 r}(3m_0 + 2m^*)\, v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2c^2 r^2} - \frac{\gamma m^* \mu^2}{2c^2 r^3}. \tag{81.43}$$

Решая приближенно это уравнение относительно v^2 и подставляя найденное значение v^2 в (81.41), мы получим, после замены $1/r$ на u:

$$\mu^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right) = 2E_0 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0^2 + \\ + 2\gamma m_0 \left(1 + \frac{1}{c^2}\left(4 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0\right) \cdot u + \\ + \frac{3\gamma^2 m_0^2}{c^2}\left(2 - \frac{m^*}{m_0}\right) u^2 + \frac{\gamma m^*}{c^2} \mu^2 u^3. \tag{81.44}$$

При $m^* = 0$ это уравнение переходит, с требуемой точностью, в (58.36). Чтобы удобнее было исследовать это уравнение, мы введем, вместо постоянных интегрирования E_0 и μ, две новые постоянные a и p, где

$$E_0 = -\frac{\gamma m_0}{2a}; \quad \mu^2 = \gamma m_0 p. \tag{81.45}$$

Кроме того, положим, в согласии с (81.30),

$$\frac{\gamma m_0}{c^2}=\alpha;\quad \frac{\gamma m^*}{c^2}=\alpha^*. \tag{81.46}$$

В ньютоновом приближении величины a и p представляют большую полуось и параметр эллипса (мы ограничиваемся здесь случаем финитного движения). В новых обозначениях уравнение (81.44) напишется:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-\frac{1}{ap}+\frac{\alpha-3\alpha^*}{4a^2p}+$$
$$+\left(\frac{2}{p}-\frac{4\alpha}{ap}+\frac{3\alpha^*}{ap}\right)u-\left(1-\frac{6\alpha}{p}+\frac{3\alpha^*}{p}\right)u^2+\alpha^*u^3. \tag{81.47}$$

Многочлен в правой части (81.47) имеет (при $a>p$) положительные корни u_1 и u_2, близкие к корням уравнения

$$-\frac{1}{ap}+\frac{2}{p}u-u^2=0, \tag{81.48}$$

которые равны

$$u_1^0=\frac{1+e}{p};\quad u_2^0=\frac{1-e}{p}, \tag{81.49}$$

где

$$1-e^2=\frac{p}{a}, \tag{81.50}$$

и, кроме того, большой корень u_3, для которого нетрудно найти соотношение

$$\alpha^*u_3=1-\frac{6\alpha-\alpha^*}{p}. \tag{81.51}$$

Поэтому дифференциальное уравнение (81.47) можно написать в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=(u_1-u)(u-u_2)\left(1-\frac{6\alpha-\alpha^*}{p}-\alpha^*u\right). \tag{81.52}$$

Произведем подстановку

$$u=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2}\cos\psi. \tag{81.53}$$

Уравнение для ψ будет

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2=1-\frac{6\alpha}{p}-\frac{\alpha^*e}{p}\cos\psi. \tag{81.54}$$

В поправочный член мы ввели приближенные значения корней из (81.49). Отсюда

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=1+\frac{3\alpha}{p}+\frac{\alpha^*e}{2p}\cos\psi. \tag{81.55}$$

Изменению r от наибольшего до наименьшего значения и обратно соответствует увеличение ψ на 2π. За это время угол φ увеличится несколько больше, чем на 2π, а именно на $2\pi+\Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi=\frac{6\pi\alpha}{p}. \tag{81.56}$$

Формула эта совпадает с формулой (58.43), которая дает смещение перигелия за один период обращения, но входящие в нее постоянные имеют несколько иной смысл. При данном параметре p смещение зависит только от суммы масс обеих компонент системы (двойной звезды). Из постоянных интегрирования в выражение для смещения входит только момент количества движения.

Наличие кубического члена в дифференциальном уравнении (81.47) приводит к тому, что орбита относительного движения будет уже не прецессирующим эллипсом, а прецессирующей кривой более сложного вида, хотя и мало отличающейся от эллипса [19].