ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 82. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (пространственные компоненты)

Потенциалы тяготения были определены нами в предыдущей главе лишь с той точностью, с какой они были нужны для вывода уравнений движения системы тел. Мы займемся теперь более точным определением потенциалов тяготения, но ввиду сложности задачи ограничимся случаем невращающихся сферически симметричных масс.

В § 67 были приведены формулы

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5}, \tag{82.01}$$

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \tag{82.02}$$

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4S_{ik}}{c^3}, \tag{82.03}$$

в которых U есть ньютонов потенциал, а U_i — вектор-потенциал тяготения; члены, содержащие S, S_i, S_{ik}, являются поправочными. Этих поправок мы в отдельности не вычисляли, так как для вывода уравнений движения достаточно было знать, кроме вектор-потенциала U_i, величину

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2) \tag{82.04}$$

[формула (67.11)], удовлетворяющую, согласно (68.30), уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma(c^2 T^{00} + T^{kk}). \tag{82.05}$$

Теперь мы вычислим и поправочные члены, причем будем исходить из выведенной в § 68 приближенной формы уравнений Эйнштейна

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2} + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}. \tag{82.06}$$

Рассмотрим сперва уравнение для $\mathfrak{g}^{ik}$. Мы сохраним в нем члены четвертого порядка относительно $1/c$, а члены более высокого порядка будем отбрасывать.

Согласно (66.07), мы можем тогда положить

$$-gT^{ik} = \rho v_i v_k - p_{ik}, \tag{82.07}$$

а в выражении (68.16) для N^{ik} взять главные члены

$$N^{ik} = -\frac{2}{c^4} Q_{ik}, \tag{82.08}$$

где мы положили, аналогично (71.16),

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{82.09}$$

Вторую производную по времени в уравнении для $\mathfrak{g}^{ik}$ мы можем отбросить. Вводя вместо $\mathfrak{g}^{ik}$ выражение (82.03), мы получим, после умножения на $\frac{1}{2} c^4$ и переноса члена Q_{ik} в правую часть, следующее уравнение для S_{ik}:

$$\Delta S_{ik} = Q_{ik} - 4\pi\gamma (\rho v_i v_k - p_{ik}). \tag{82.10}$$

Напомним, что вектор-потенциал тяготения U_i удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{82.11}$$

и что в силу уравнения Пуассона для ньютонова потенциала U мы имеем

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_k} = 4\pi\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{82.12}$$

Поэтому из уравнений (82.10) и (82.11) следует

$$\Delta \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \right) = -4\pi\gamma \left\{ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right\} \tag{82.13}$$

и в силу уравнений движения сплошной среды, написанных в форме (66.13),

$$\Delta \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{82.14}$$

Так как последнее уравнение имеет место во всем пространстве, то будет

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{82.15}$$

т. е. будет выполняться и условие гармоничности. Получив явные выражения для S_{ik}, мы сможем проверить выполнение условия (82.15) и прямой подстановкой.

Функции S_{ik} мы будем искать в виде

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{82.16}$$

где U_{ik} и V_{ik} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma(\rho v_i v_k - p_{ik}), \tag{82.17}$$

$$\Delta V_{ik} = Q_{ik}. \tag{82.18}$$

Подставляя в формулу (82.09) для Q_{ik} значение ньютонова потенциала

$$U = \sum_a u_a, \tag{82.19}$$

мы можем написать

$$Q_{ik} = \sum_a Q_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_{ik}^{(ab)}, \tag{82.20}$$

где *)

$$Q_{ik}^{(aa)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{82.21}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a \cdot \operatorname{grad} u_b) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_b}{\partial x_k} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right). \tag{82.22}$$

Сообразно разложению (82.20), мы можем решение V_{ik} уравнения (82.18) искать в виде

$$V_{ik} = \sum_a V_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} V_{ik}^{(ab)}, \tag{82.23}$$

где отдельные члены удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = Q_{ik}^{(aa)}, \tag{82.24}$$

$$\Delta V_{ik}^{(ab)} = Q_{ik}^{(ab)}. \tag{82.25}$$

Мы найдем явные решения написанных уравнений для случая невращающихся сферически-симметричных масс. В этом случае ньютонов потенциал от массы (a) во внешнем пространстве будет

$$u_a = \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}, \tag{82.26}$$

и выражения (82.21) и (82.22) для $Q_{ik}^{(aa)}$ и $Q_{ik}^{(ab)}$ примут вид:

$$Q_{ik}^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{\frac{1}{2}\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^4} - \frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^6}\right\}, \tag{82.27}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \gamma^2 M_a M_b \cdot \frac{1}{2}\left\{\frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}\delta_{ik} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x_i - a_i)(x_k - b_k) + (x_i - b_i)(x_k - a_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}\right\}. \tag{82.28}$$

---

*) Величина $Q_{ik}^{(aa)}$ обозначалась нами раньше (в § 71) через $q_{ik}^{(a)}$.

Эти формулы справедливы вне масс; внутри же масс нужно, строго говоря, пользоваться более точными выражениями (82.21) и (82.22).

Различие между точным и приближенным значением величины $Q_{ik}^{(ab)}$ не будет, однако, существенно влиять на значение функции $V_{ik}^{(ab)}$, по крайней мере в том случае, когда линейные размеры масс малы по сравнению с их взаимными расстояниями. Поэтому мы будем разуметь под величиной $Q_{ik}^{(ab)}$ в правой части (82.25) выражение (82.28). Это выражение имеет в точках $\mathbf{r}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{b}$ особенности не выше дипольного характера. Вследствие этого, уравнение (82.25) для $V_{ik}^{(ab)}$ будет иметь решение, которое остается конечным во всем пространстве, включая точки $\mathbf{r}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{b}$, и обращается на бесконечности в нуль.

Это решение может быть найдено в конечном виде. Для этого напишем выражение (82.28) в виде производных по параметрам a_i, b_j, от функции $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}$. Мы будем иметь

$$Q_{ik}^{(ab)}=\gamma^2\frac{M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial b_i}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{82.29}$$

Поэтому уравнение (82.25) сводится к более простому уравнению

$$\Delta\varphi=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} \tag{82.30}$$

Действительно, если φ есть решение (82.30), то величина

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{\gamma^2M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\,\partial b_i}\right) \tag{82.31}$$

будет решением уравнения (82.25).

Но решение уравнения (82.30) легко написать. Обозначим через s периметр треугольника с вершинами в точках $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

$$s=|\mathbf{r}-\mathbf{a}|+|\mathbf{r}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{82.32}$$

Тогда функция

$$\varphi=\lg s=\lg(|\mathbf{r}-\mathbf{a}|+|\mathbf{r}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|) \tag{82.33}$$

будет удовлетворять уравнению (82.30), так как мы имеем

$$\Delta\lg s=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{82.34}$$

Таким образом, искомое решение уравнения (82.25) имеет вид:

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{\gamma^2M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_k\,\partial b_i}\right). \tag{82.35}$$

Нетрудно проверить, что это выражение остается всюду конечным и обращается на бесконечности в нуль.

Обратимся теперь к уравнению (82.24) для $V_{ik}^{(aa)}$. Перенеся начало координат в точку **a** и учитывая сферическую симметрию, мы можем написать его в виде

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = \left(\frac{1}{2}\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) u'(r)^2, \tag{82.36}$$

где мы положили для краткости

$$u_a = u(r). \tag{82.37}$$

Решение уравнения (82.36) можно искать в виде

$$V_{ik}^{(aa)} = -\delta_{ik} q_0(r) + \left(x_i x_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} r^2\right) q_2(r). \tag{82.38}$$

Тогда q_0 и q_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 q_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dq_0}{dr} = -\frac{1}{6} u'(r)^2, \tag{82.39}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{dq_2}{dr} = -\frac{1}{r^2} u'(r)^2, \tag{82.40}$$

откуда, имея в виду граничные условия, получаем:

$$q_0(r) = \frac{1}{6}\int\limits_r^\infty r u'(r)^2\, dr + \frac{1}{6r}\int\limits_0^r r^2 u'(r)^2\, dr, \tag{82.41}$$

$$q_2(r) = \frac{1}{5}\int\limits_r^\infty \frac{1}{r} u'(r)^2\, dr + \frac{1}{5r^5}\int\limits_0^r r^4 u'(r)^2\, dr. \tag{82.42}$$

Если радиус тела равен L, то при $r > L$ будет

$$u(r) = \frac{\gamma M_a}{r}, \tag{82.43}$$

и выражения для $q_0(r)$ и $q_2(r)$ приведутся к следующим:

$$q_0(r) = -\frac{\gamma^2 M_a^2}{12 r^2} + \frac{\gamma \varepsilon_a}{3r}, \tag{82.44}$$

$$q_2(r) = \frac{\gamma^2 M_a^2}{4r^4} - \frac{\gamma^2 M_a^2}{5r^5}\lambda_a, \tag{82.45}$$

где

$$\lambda_a = L - \frac{1}{\gamma^2 M_a^2}\int\limits_0^L r^4 u'(r)^2\, dr \tag{82.46}$$

есть некоторая длина порядка L, а величина

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3 = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_0^\infty r^2 u'(r)^2\, dr \tag{82.47}$$

есть взятая с обратным знаком гравитационная энергия тела. Подставляя найденные значения $q_0(r)$ и $q_2(r)$ в формулу (82.38), получим

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma^2 M_a^2 x_i x_k}{4r^4} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{r} - \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5r^5}\left(x_i x_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} r^2\right) \tag{82.48}$$

или, если вновь заменить x_i на $x_i - a_i$,

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4\,|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^4} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \\ - \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5\,|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^5}\left[(x_i - a_i)(x_k - a_k) - \frac{1}{3}\delta_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2\right]. \tag{82.49}$$

Здесь последний член мал по сравнению с первым, если расстояние до массы (a) велико по сравнению с ее радиусом; строго говоря, его следовало бы отбросить, так как подобное пренебрежение уже сделано при вычислении $V_{ik}^{(ab)}$.

Нам остается написать решение уравнения (82.17). Положим, для не-вращающихся масс

$$v_i = \dot{a}_i; \quad p_{ik} = -p\delta_{ik}, \tag{82.50}$$

где p определяется из уравнений

$$dp = \rho\, du_a, \tag{82.51}$$

причем, согласно (74.24),

$$\int_{(a)} p\,(dx)^3 = \frac{1}{3}\varepsilon_a. \tag{82.52}$$

Мы будем тогда иметь

$$U_{ik} = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \sum_a \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \tag{82.53}$$

Дипольные члены здесь равны нулю по причине сферической симметрии тел, а члены более высокого порядка относительно L/R [того же, как последний член в (82.49)] мы отбрасываем.

Полагая теперь

$$S_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{\gamma^2 M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4\,|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^4}, \tag{82.54}$$

$$S_{ik}^{(ab)} = V_{ik}^{(ab)} = \frac{\gamma^2 M_a M_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\,\partial b_j} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\,\partial b_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_k\,\partial b_i}\right), \tag{82.55}$$

обозначая через S_{ik} сумму

$$S_{ik} = \sum_a S_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_{ik}^{(ab)} \tag{82.56}$$

и подставляя ее в формулу

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \tag{82.03}$$

мы получим явные выражения для пространственных компонент фундаментального тензора. Эти выражения справедливы также и в области внутри системы тел (между массами).

Для смешанных компонент фундаментального тензора мы имели приближенное выражение

$$g^{0i} = \frac{4}{c^3} U_i, \tag{82.57}$$

где U_i есть решение уравнения (82.11), которое в рассматриваемом приближении равно

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{82.58}$$

[см. формулу (76.23)].

Мы можем теперь проверить, что найденные явные выражения для S_{ik} и для U_i удовлетворяют условию гармоничности (82.15). Мы имеем

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial S_{ik}^{(aa)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma M_a \ddot{a}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \tag{82.59}$$

Далее, при помощи формулы

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} = -\frac{(|\mathbf{r} - \mathbf{a}| + |\mathbf{r} - \mathbf{b}| - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|)}{2|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \tag{82.60}$$

и двух других формул, получаемых из (82.60) перестановкой букв ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$), можно проверить равенство

$$\frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \gamma^2 M_a M_b \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right). \tag{82.61}$$

Суммируя это по a и по b, получаем

$$\sum_{a \neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_{a \neq b} \gamma^2 M_a M_b \frac{(a_i - b_i)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{82.62}$$

или, если мы положим

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \tag{82.63}$$

$$\sum_{a \neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{82.64}$$

Складывая равенства (82.59) и (82.64), получаем окончательно

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \left(M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right). \tag{82.65}$$

Но величина Φ есть ньютонова потенциальная энергия системы тел. Поэтому

$$M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \tag{82.66}$$

в силу ньютоновых уравнений движения. Следовательно, будет равно нулю и все выражение (82.65), в согласии с (82.15). Видоизменяя наши рассуждения, мы могли бы (подобно тому, как это сделано в нашей работе 1939 г. [34]) вывести из (82.15) и (82.65) ньютоновы уравнения движения (82.66).

§ 83. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (смешанные и временна́я компоненты)

Найдем следующее [по сравнению с формулами (82.57) и (82.58)] приближение для смешанных компонент $\mathfrak{g}^{0i}$ потенциалов тяготения. В уравнении (82.06) мы должны положить $\mu = 0$, $\nu = 1$ и подставить туда значение N^{0i} из (68.15) и значение T^{0i} из (66.07), с тем, впрочем, упрощением, что напряжения p_{ik} сводятся к изотропному давлению p и что скорости $v_i = \dot{a}_i$ внутри каждого тела постоянны. Напишем формулу (68.15) для N^{0i} в виде

$$N^{0i} = -\frac{2}{c^6} Q_i, \tag{83.01}$$

где

$$Q_i = -3 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + 4 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial x_j}. \tag{83.02}$$

Уравнение (82.06) напишется тогда

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6} Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4} (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.03}$$

где, согласно (66.07), в случае изотропного давления p будет

$$(c^2 + 4U) T^{0i} = v_i \left\{ \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) + \frac{p}{c^2} \right\}. \tag{83.04}$$

Подставив в уравнение (83.03) выражение

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5} \tag{83.05}$$

для $\mathfrak{g}^{0i}$, мы можем удовлетворить этому уравнению, если мы потребуем, чтобы было

$$\Delta U_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -4\pi\gamma (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.06}$$

$$\Delta S_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i. \tag{83.07}$$

Так как эти уравнения содержат в качестве параметра скорость света c, то величины U_i и S_i уже не будут коэффициентами