Но величина Φ есть ньютонова потенциальная энергия системы тел. Поэтому

$$M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \tag{82.66}$$

в силу ньютоновых уравнений движения. Следовательно, будет равно нулю и все выражение (82.65), в согласии с (82.15). Видоизменяя наши рассуждения, мы могли бы (подобно тому, как это сделано в нашей работе 1939 г. [[34]]) вывести из (82.15) и (82.65) ньютоновы уравнения движения (82.66).

§ 83. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (смешанные и временна́я компоненты)

Найдем следующее [по сравнению с формулами (82.57) и (82.58)] приближение для смешанных компонент $\mathfrak{g}^{0i}$ потенциалов тяготения. В уравнении (82.06) мы должны положить $\mu = 0$, $\nu = 1$ и подставить туда значение N^{0i} из (68.15) и значение T^{0i} из (66.07), с тем, впрочем, упрощением, что напряжения p_{ik} сводятся к изотропному давлению p и что скорости $v_i = \dot{a}_i$ внутри каждого тела постоянны. Напишем формулу (68.15) для N^{0i} в виде

$$N^{0i} = -\frac{2}{c^6} Q_i, \tag{83.01}$$

где

$$Q_i = -3 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial U}{\partial x_j}. \tag{83.02}$$

Уравнение (82.06) напишется тогда

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6} Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4} (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.03}$$

где, согласно (66.07), в случае изотропного давления p будет

$$(c^2 + 4U) T^{0i} = v_i \left\{ \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) + \frac{p}{c^2} \right\}. \tag{83.04}$$

Подставив в уравнение (83.03) выражение

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5} \tag{83.05}$$

для $\mathfrak{g}^{0i}$, мы можем удовлетворить этому уравнению, если мы потребуем, чтобы было

$$\Delta U_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -4\pi\gamma (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.06}$$

$$\Delta S_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i. \tag{83.07}$$

Так как эти уравнения содержат в качестве параметра скорость света c, то величины U_i и S_i уже не будут коэффициентами разложения $\mathfrak{g}^{0i}$ по обратным степеням c. Однако эта непоследовательность в обозначениях несущественна, поскольку в первом приближении уравнение (83.06) для U_i совпадает с (82.11).

Чтобы написать решение уравнения (83.06) в области вне масс, нужно знать значение объемного интеграла от его правой части, взятого по объему каждого тела. Для вычисления этого интеграла припомним соотношение

$$\rho\Pi - \rho u_a + p = 0, \tag{83.08}$$

к которому сводится формула (73.26) при отсутствии вращения. Мы имеем, согласно (74.07) и (74.24),

$$\int\limits_{(a)} \rho u_a (dx)^3 = 2\varepsilon_a; \qquad \int\limits_{(a)} p\,(dx)^3 = \frac{1}{3}\varepsilon_a. \tag{83.09}$$

Соотношение (83.08) дает поэтому

$$\int\limits_{(a)} \rho\Pi\,(dx)^3 = \frac{5}{3}\varepsilon_a. \tag{83.10}$$

При помощи этих формул получаем

$$\int\limits_{(a)} (c^2 + 4U)\,T^{0i}\,(dx)^3 = M_a\dot{a}_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right\} + \frac{8}{c^2}\varepsilon_a\dot{a}_i, \tag{83.11}$$

где $U^{(a)}$ есть введенный в § 71 внешний потенциал. Вычисления здесь значительно проще, чем в § 76, так как мы вращения не рассматриваем.

Заметим, что величина (83.10) есть внутренняя (упругая) энергия тела. Так как его гравитационная энергия есть минус ε_a, то сумма, равная $\frac{2}{3}\varepsilon_a$, представляет ту энергию, которую нужно учесть при вычислении эффективной массы. Последняя будет равна *)

$$m_a = M_a + \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_a}{c^2}, \tag{83.12}$$

в согласии с (76.18) и (80.18).

При помощи (83.11) мы можем написать приближенное решение уравнения (83.06) в виде

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma\dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{M_a + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right) + \frac{8\varepsilon_a}{c^2}\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a\dot{a}_i|\mathbf{r}-\mathbf{a}|. \tag{83.13}$$

Последний член в (83.13) представляет поправку на запаздывание.

*) Соотношение (83.12) необходимо иметь в виду при сравнении выведенных здесь формул с формулами нашей работы 1939 г. [34].

Переходим к уравнению (83.07) для S_i. В этом уравнении можно пренебречь второй производной по времени и писать его в виде

$$\Delta S_i = Q_i. \tag{83.14}$$

Подобно (82.20), можно представить величину Q_i в виде

$$Q_i = \sum_a Q_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_i^{(ab)}, \tag{83.15}$$

где $Q_i^{(aa)}$ есть квадратичная функция от первых производных массы (a), а $Q_i^{(ab)}$ — билинейная функция от первых производных потенциалов масс (a) и (b). Соответственно разложению (83.15) можно написать решение уравнения (83.14) в виде

$$S_i = \sum_a S_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)}, \tag{83.16}$$

где отдельные члены представляют решения уравнений

$$\Delta S_i^{(aa)} = Q_i^{(aa)}, \tag{83.17}$$

$$\Delta S_i^{(ab)} = Q_i^{(ab)}. \tag{83.18}$$

Для $Q_i^{(aa)}$ мы возьмем выражение, аналогичное (82.21) и справедливое также и внутри данной массы:

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j \left\{ -\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} + 4\delta_{ij} (\operatorname{grad} u_a)^2 \right\}. \tag{83.19}$$

Для $Q_i^{(ab)}$ мы ограничимся выражением, справедливым вне масс и аналогичным (82.28), а именно:

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \frac{(x_j - a_j)(x_i - b_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} + \right.$$
$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j) \frac{(x_i - a_i)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i) \frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} \right\}. \tag{83.20}$$

Чтобы решить уравнение (83.17), представим его правую часть в виде

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j Q_{ij}^{(aa)} + 7\dot{a}_i Q_{jj}^{(aa)}. \tag{83.21}$$

Решением будет, очевидно,

$$S_i^{(aa)} = \dot{a}_j V_{ij}^{(aa)} + 7\dot{a}_i V_{jj}^{(aa)}, \tag{83.22}$$

где $V_{ij}^{(aa)}$ есть найденное выше решение (82.38) или (82.49) уравнения (82.24).

Переходя к уравнению (83.18), представим его правую часть, т. е. выражение (83.20), в виде

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_i} + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial b_j} + \right.$$
$$\left. + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i) \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_j} \right\} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{83.23}$$

Вследствие (82.34) решением уравнения (83.18) будет

$$S_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{(3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\, \partial b_i} + \right.$$
$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\, \partial b_j} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\, \partial b_j}\right\}. \qquad (83.24)$$

Мы выпишем также значение $S_i^{(aa)}$ вне масс. Для этого нужно подставить в (83.22) значение $V_{ij}^{(aa)}$ из (82.49), причем можно опустить члены, содержащие λ_a и быстро убывающие на больших расстояниях. В получаемом для $S_i^{(aa)}$ выражении удобно выделить гармонический член и писать $S_i^{(aa)}$ в виде

$$S_i^{(aa)} = -\frac{22}{3}\dot{a}_i \frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \overline{S}_i^{(aa)}, \qquad (83.25)$$

где

$$\overline{S}_i^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{\dot{a}_j \frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{4|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^4} + \frac{7}{4}\frac{\dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2}\right\}. \qquad (83.26)$$

Подстановка этих выражений в формулу (83.16) даст значение S_i, которое, вместе с найденным раньше значением (83.13) для U_i, позволит по формуле (83.05) определить и $\mathfrak{g}^{0i}$. Формулу для $\mathfrak{g}^{0i}$ можно написать в виде

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\overline{U}_i}{c^3} + \frac{4\overline{S}_i}{c^5}, \qquad (83.27)$$

где

$$\overline{U}_i = \sum_a \frac{\gamma\dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{M_a + \frac{2\varepsilon_a}{3c^2} + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a \dot{a}_i |\mathbf{r}-\mathbf{a}|, \qquad (83.28)$$

$$\overline{S}_i = \sum_a \overline{S}_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)}. \qquad (83.29)$$

Здесь величины $\overline{U}_i$ и $\overline{S}_i$ отличаются, соответственно, от U_i и S_i гармоническими членами, содержащими ε_a. Заметим, что величина ε_a входит в $\overline{U}_i$ только через посредство эффективной массы (83.12). Сумма $\overline{S}_i$ есть однородная квадратичная функция от масс, тогда как $\overline{U}_i$ зависит от масс линейно.

Нам остается найти явное выражение для временной компоненты потенциалов тяготения, т. е. для величины $\mathfrak{g}^{00}$. В § 68 уже были выписаны уравнения, определяющие $\mathfrak{g}^{00}$. Согласно (68.42) и (68.40) мы имеем

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}\overline{U} + \frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \qquad (83.30)$$

где $\overline{U}$ есть обобщенный ньютонов потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00}, \tag{83.31}$$

в правой части которого стоит выражение

$$\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00} = \rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right), \tag{83.32}$$

вытекающее из (66.07) и использованное в § 79. Потенциал $\overline{U}$ вычисляется подобно тому, как был вычислен в § 77 потенциал U^*, с тем упрощением, что теперь массы предполагаются сферически симметричными и невращающимися. Используя (83.09) и (83.10), получаем

$$\int\limits_{(a)}\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00}(dx)^3 = M_a + \frac{2}{3c^2} + \frac{M_a}{2c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}(\mathbf{a})\right) \tag{83.33}$$

и, следовательно,

$$\overline{U} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{M_a + \frac{2}{3c^2}\varepsilon_a + \frac{M_a}{2c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}(\mathbf{a})\right)\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a|\mathbf{r}-\mathbf{a}|. \tag{83.34}$$

Подстановка этого выражения в (83.30) дает $\mathfrak{g}^{00}$. Тем самым заканчивается определение потенциалов тяготения во втором приближении.

Мы должны еще проверить, что полученные для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ выражения удовлетворяют условию гармоничности

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0. \tag{83.35}$$

Дифференцируя выражения (83.34) и (83.28) для $\overline{U}$ и $\overline{U}_i$, получаем непосредственно

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{U}_i}{\partial t} = \frac{7}{2c^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \\ + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left(\dot{a}_i\ddot{a}_i - \frac{1}{2}\frac{dU^{(a)}(\mathbf{a})}{dt}\right). \tag{83.36}$$

Далее, мы имеем из (83.26):

$$\frac{\partial\overline{S}_i^{(aa)}}{\partial x_i} = -\frac{7}{4}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma^2 M_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2}. \tag{83.37}$$

При вычислении выражения

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial a_j}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial b_i \partial x_i} + \right.$$

$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j)\frac{\partial}{\partial b_j}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i \partial x_i} + 4(\dot{a}_j + \dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i \partial b_i} \right\} \qquad (83.38)$$

мы должны использовать формулу (82.60) и две другие формулы, получаемые из (82.60) перестановкой букв a, b, x; кроме того, при преобразовании выражения (83.38) следует иметь в виду, что $\lg s$ и производные от этой величины зависят только от разностей координат, вследствие чего, например,

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{\partial}{\partial b_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\lg s = 0. \qquad (83.39)$$

Объединяя в выражении (83.38) члены, содержащие $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{b}|$, затем члены, содержащие $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, и наконец члены, содержащие $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, можем написать:

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i} = \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{ -7\dot{a}_j \frac{\partial}{\partial a_j} - 7\dot{b}_j \frac{\partial}{\partial b_j} \right\} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{b}|} +$$

$$+ \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{ -7\dot{a}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + (\dot{a}_j + \dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial b_j} \right\} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} +$$

$$+ \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{ -7\dot{b}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + (\dot{a}_j + \dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial a_j} \right\} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}. \qquad (83.40)$$

Суммируя это выражение по a и по b (с пропуском члена $a = b$) и складывая с суммой по a от (83.37), получаем:

$$\frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i} = -\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} +$$

$$+ \sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}\left\{ \frac{1}{2}\frac{dU^{(a)}(\mathbf{a})}{dt} - \dot{a}_i \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a \right\}. \qquad (83.41)$$

Но, если в формуле (83.30) заменить в поправочном члене $\overline{U}$ на U, то левая часть условия гармоничности (83.35) будет отличаться лишь множителем $\frac{4}{c^3}$ от выражения

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}\dot{a}_i \left\{ \ddot{a}_i - \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a \right\}, \qquad (83.42)$$

которое получается после прибавки к (83.36) деленного на c^2 выражения (83.41) и переноса одного из членов в левую часть.

Но мы имеем

$$M_a\left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \tag{83.43}$$

где Φ — ньютонова потенциальная энергия

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \gamma \frac{M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{83.44}$$

Поэтому, в силу ньютоновых уравнений движения будет

$$\ddot{a}_i = \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a, \tag{83.45}$$

и правая часть (83.42) обращается в нуль. Таким образом, условие гармоничности (83.35) выполняется.

Чтобы получить для потенциалов тяготения $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ не слишком сложные явные выражения, справедливые также и внутри системы тел (между массами), нам пришлось, в этом и в предыдущем параграфе, ввести довольно сильные ограничения: мы предположили массы сферически симметричными и не вращающимися. От этих ограничений мы освободимся в следующем параграфе, когда будем рассматривать потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел.

§ 84. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (пространственные компоненты)

В этом параграфе и в следующем мы выведем для потенциалов тяготения явные выражения, справедливые на „умеренно-больших" расстояниях от системы тел. Под „умеренно-большими" расстояниями мы разумеем такие, которые хотя и велики по сравнению с размерами системы, но все еще малы по сравнению с длиной излучаемых системой волн (см. § 64). Относительно внутренней структуры тел мы сохраним столь же общие предположения, как и те, какие мы делали в § 79 при выводе интегралов уравнений движения системы тел.

Начнем с определения пространственных компонент $\mathfrak{g}^{ik}$. Мы имеем, как и в § 82,

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \tag{84.01}$$

где, согласно (82.16)—(82.18),

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{84.02}$$