которое получается после прибавки к (83.36) деленного на c^2 выражения (83.41) и переноса одного из членов в левую часть.

Но мы имеем

$$M_a\left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \tag{83.43}$$

где Φ — ньютонова потенциальная энергия

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \gamma \frac{M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{83.44}$$

Поэтому, в силу ньютоновых уравнений движения будет

$$\ddot{a}_i = \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a, \tag{83.45}$$

и правая часть (83.42) обращается в нуль. Таким образом, условие гармоничности (83.35) выполняется.

Чтобы получить для потенциалов тяготения $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ не слишком сложные явные выражения, справедливые также и внутри системы тел (между массами), нам пришлось, в этом и в предыдущем параграфе, ввести довольно сильные ограничения: мы предположили массы сферически симметричными и не вращающимися. От этих ограничений мы освободимся в следующем параграфе, когда будем рассматривать потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел.

§ 84. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (пространственные компоненты)

В этом параграфе и в следующем мы выведем для потенциалов тяготения явные выражения, справедливые на „умеренно-больших“ расстояниях от системы тел. Под „умеренно-большими“ расстояниями мы разумеем такие, которые хотя и велики по сравнению с размерами системы, но все еще малы по сравнению с длиной излучаемых системой волн (см. § 64). Относительно внутренней структуры тел мы сохраним столь же общие предположения, как и те, какие мы делали в § 79 при выводе интегралов уравнений движения системы тел.

Начнем с определения пространственных компонент $\mathfrak{g}^{ik}$. Мы имеем, как и в § 82,

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \tag{84.01}$$

где, согласно (82.16)—(82.18),

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{84.02}$$

и функции U_{ik} и V_{ik} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma(\rho v_i v_k - p_{ik}), \tag{84.03}$$

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{84.04}$$

Правая часть уравнения (84.03) отлична от нуля только внутри масс и имеет, если пользоваться математическим термином, моменты всех порядков (см. § 70). Это значит, что, умножая ее на произведения различных степеней координат и интегрируя по всему объему, мы получим сходящиеся интегралы. Поэтому решение уравнения (84.03), справедливое вне системы масс, можно написать в виде ряда по шаровым функциям (мультиполям). Начало координат мы возьмем в какой-либо точке внутри системы тел, не обязательно в ее центре тяжести. Мы получим

$$U_{ik} = U_{ik}^0 + U_{ik}^{(1)} + \ldots, \tag{84.05}$$

где первые два члена равны:

$$U_{ik}^0 = \frac{\gamma}{r}\int(\rho v_i v_k - p_{ik})(dx)^3, \tag{84.06}$$

$$U_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{r^3}\int(\rho v_i v_k - p_{ik})\,x_j\,(dx)^3. \tag{84.07}$$

В уравнении же (84.04) правая часть отлична от нуля во всем пространстве и убывает только обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Поэтому существует только момент нулевого порядка, и решение этого уравнения не может быть представлено в виде ряда, аналогичного (84.05).

Чтобы найти решение, введем в правую часть (84.04) выражение для ньютонова потенциала в виде интеграла

$$U = \gamma\int\frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{84.08}$$

Мы получим тогда формулу, которую можно написать в виде

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\gamma^2\int\int\rho'(dx')^3\rho''(dx'')^3\left\{\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_l'\,\partial x_l''} - \frac{\partial^2}{\partial x_i'\,\partial x_k''} - \frac{\partial^2}{\partial x_k'\,\partial x_i''}\right\}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \tag{84.09}$$

Из § 82 мы знаем [формулы (82.33) и (82.34)], что функция

$$\lg s = \lg(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}-\mathbf{r}''| + |\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|) \tag{84.10}$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta\lg s = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \tag{84.11}$$

Отсюда нетрудно заключить, что то решение уравнения (84.09), которое всюду конечно и обращается на бесконечности в нуль, может быть представлено в виде

$$V_{ik} = \frac{1}{2}\gamma^2 \int\int \rho'(dx')^3 \rho''(dx'')^3 \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_l \partial x''_l} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_i \partial x''_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_k \partial x''_i} \right\}. \tag{84.12}$$

Нас интересует значение этого выражения на больших расстояниях. Для вычисления его мы должны взять разложение s и $\lg s$ по обратным степеням r, справедливое при больших r и конечных r' и r''. Мы имеем

$$s = 2r + \left(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| - \frac{x_i x'_i}{r} - \frac{x_i x''_i}{r}\right) + \\ + \frac{1}{2}(x'_i x'_k + x''_i x''_k)\left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3}\right) + \ldots, \tag{84.13}$$

откуда

$$\lg s = \lg 2r + \frac{1}{2r}\left(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| - \frac{x_i(x'_i + x''_i)}{r}\right) + \\ + \frac{x_j}{4r^3}(x'_j + x''_j)|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| + \frac{1}{8r^2}(r'^2 + r''^2 + 2x'_j x''_j) - \\ - \frac{x_i x_k}{8r^4}(3x'_i x'_k + 3x''_i x''_k + x''_i x'_k + x'_i x''_k) + \ldots \tag{84.14}$$

Дифференцируя, получаем для симметричной и антисимметричной части второй производной по x'_i и x''_k выражения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_i \partial x''_k} + \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x''_i \partial x'_k}\right) = \frac{1}{4r^2}\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) - \\ - \left(\frac{1}{2r} + \frac{x_j(x'_j + x''_j)}{4r^3}\right)\left(\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{(x'_i - x''_i)(x'_k - x''_k)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3}\right), \tag{84.15}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_i \partial x''_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x''_i \partial x'_k}\right) = \frac{x_k}{4r^3}\frac{x'_i - x''_i}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{x_i}{4r^3}\frac{x'_k - x''_k}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \tag{84.16}$$

Здесь отброшены члены, убывающие быстрее чем $1/r^2$. Полагая в (84.15) $i = l$ и $k = l$ и суммируя по l, получаем

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_l \partial x''_l} = \frac{1}{2r^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{x_j(x'_j + x''_j)}{2r^3}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \tag{84.17}$$

в согласии с точной формулой

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x'_l \partial x''_l} = \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\cdot|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \tag{84.18}$$

Подставим (84.15) и (84.17) в (84.12) и рассмотрим сперва члены, убывающие как $1/r$. Обозначив соответствующие члены V_{ik} через V_{ik}^0, получим

$$V_{ik}^0 = -\frac{\gamma^2}{2r}\int\int \rho'(dx')^3\rho''(dx'')^3\frac{(x_i'-x_i'')(x_k'-x_k'')}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|^3}. \tag{84.19}$$

В подинтегральной функции важна только симметричная часть (относительно x' и x''). Заменяя поэтому множитель $x_i'-x_i''$ на $2x_i'$ и выполняя интегрирование по x'', получаем

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{r}\int x_i\frac{\partial U}{\partial x_k}\rho(dx)^3, \tag{84.20}$$

или, так как это выражение заведомо симметрично относительно i и k,

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r}\int\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_k}+x_k\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\rho(dx)^3 \tag{84.21}$$

(см. также лемму в § 79). Заметим, что это же выражение равно

$$V_{ik}^0 = -\frac{1}{4\pi r}\int\left(\frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad}U)^2-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)(dx)^3, \tag{84.22}$$

что и следовало ожидать, так как V_{ik} удовлетворяет уравнению (84.04) и объемный интеграл от правой части этого уравнения конечен.

Рассмотрим теперь в (84.15) и (84.17) члены, убывающие как $1/r^2$. Среди них есть члены, не зависящие ни от x', ни от x''. Эти члены дают в V_{ik} вклад

$$V_{ik}' = \frac{\gamma^2M^2x_ix_k}{4r^4}, \tag{84.23}$$

где M есть полная масса системы.

Остальные члены порядка $1/r^2$ имеют дипольный характер. Они равны

$$V_{ik}^{(1)} = -\frac{\gamma^2x_j}{2r^3}\int\rho'(dx')^3\rho''(dx'')^3\frac{x_j'+x_j''}{2}\frac{(x_i'-x_i'')(x_k'-x_k'')}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|^3}. \tag{84.24}$$

Но мы имеем тождество

$$\begin{aligned}&[x_i'x_j'(x_k'-x_k'')+x_k'x_j'(x_i'-x_i'')-x_i'x_k'(x_j'-x_j'')]+\\&+[x_i''x_j''(x_k''-x_k')+x_k''x_j''(x_i''-x_i')-x_i''x_k''(x_j''-x_j')]=\\&=(x_j'+x_j'')(x_i'-x_i'')(x_k'-x_k''),\end{aligned} \tag{84.25}$$

в котором выражения в двух квадратных скобках в левой части получаются друг из друга перестановкой x' и x''. При интегрировании в (84.24) мы можем поэтому взять вместо множителя (84.25) одну из квадратных скобок, умноженную на 2. Выполняя затем интегрирование по той переменной, которая входит в квадратную скобку линейно, получим

$$V_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_i}{2r^3} \int \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \rho \, (dx)^3. \qquad (84.26)$$

Объединим теперь в U_{ik} и V_{ik} члены одинаковой полярности. Полагая

$$S_{ik}^0 = U_{ik}^0 + V_{ik}^0 \qquad (84.27)$$

и складывая (84.06) и (84.21), получим

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \left\{ 2\rho v_i v_k - 2p_{ik} + \rho \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \right\} (dx)^3. \qquad (84.28)$$

Представив член, содержащий p_{ik}, в виде

$$-2 \int p_{ik} \, (dx)^3 = \int \left(x_i \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_j} + x_k \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j} \right) (dx)^3 \qquad (84.29)$$

и воспользовавшись уравнениями движения внутренней задачи

$$\rho w_i = \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \qquad (84.30)$$

получим из (84.28)

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \rho \, (x_i w_k + x_k w_i + 2 v_i v_k) \, (dx)^3 \qquad (84.31)$$

или

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho x_i x_k \, (dx)^3. \qquad (84.32)$$

Таким образом, после всех преобразований величина S_{ik}^0 выразилась через вторую производную по времени от соответствующего момента инерции.

Преобразуем теперь величину

$$S_{ik}^{(1)} = U_{ik}^{(1)} + V_{ik}^{(1)}. \qquad (84.33)$$

Из (84.07) и (84.26) получаем

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \int \left\{ 2\rho v_i v_k x_j - 2p_{ik} x_j + \right. \\ \left. + \rho \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \right\} (dx)^3. \qquad (84.34)$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (x_j x_i p_{ks} + x_j x_k p_{is} - x_i x_k p_{js}) = \\ = 2 x_j p_{ik} + x_j x_i \frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s} + x_j x_k \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} - x_i x_k \frac{\partial p_{js}}{\partial x_s}, \qquad (84.35)$$

представим интеграл, содержащий p_{ik}, в виде

$$-2\int p_{ik}x_j\,(dx)^3=\int\left(x_jx_i\frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s}+x_jx_k\frac{\partial p_{is}}{\partial x_s}-x_ix_k\frac{\partial p_{js}}{\partial x_s}\right)(dx)^3. \quad (84.36)$$

Пользуясь уравнениями движения (84.30), можем тогда написать

$$S_{ik}^{(1)}=\frac{\gamma x_j}{2r^3}\int\rho\,(2x_jv_iv_k+x_jx_iw_k+x_jx_kw_i-x_ix_kw_j)\,(dx)^3, \quad (84.37)$$

или

$$S_{ik}^{(1)}=\frac{\gamma x_j}{2r^3}\frac{d}{dt}\int\rho\,(x_jx_iv_k+x_jx_kv_i-x_ix_kv_j)\,(dx)^3. \quad (84.38)$$

Отсюда по формуле

$$S_{ik}=S_{ik}^{(0)}+S_{ik}^{(1)}+V'_{ik} \quad (84.39)$$

получаем S_{ik}, а подставляя это значение S_{ik} в формулу (84.01), получим следующее окончательное выражение для $\mathfrak{g}^{ik}$:

$$\mathfrak{g}^{ik}=-c\delta_{ik}+\frac{2\gamma}{c^3r}\frac{d^2}{dt^2}\int\rho x_ix_k\,(dx)^3+$$
$$+\frac{2\gamma x_j}{c^3r^3}\frac{d}{dt}\int\rho\,(x_jx_iv_k+x_jx_kv_i-x_ix_kv_j)\,(dx)^3+\frac{\gamma^2M^2x_ix_k}{c^3r^4}. \quad (84.40)$$

Мы получили явные выражения для пространственных компонент потенциалов тяготения, справедливые на больших (в указанном выше смысле) расстояниях от системы тел. Здесь среди членов, содержащих c^3 в знаменателе, отброшены те, которые убывают быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$.

Заметим, что в случае одной сосредоточенной массы выражение (84.40) приводится к тому, которое соответствует строгому решению уравнений тяготения [формула (58.12)].

§ 85. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (смешанные и временна́я компоненты)

Для определения смешанных компонент на больших расстояниях мы вернемся к уравнениям, приведенным в начале § 83. Мы имеем

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{0i}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2}=\frac{2}{c^6}Q_i-\frac{8\pi\gamma}{c^4}(c^2+4U)\,T^{0i}, \quad (85.01)$$

где

$$Q_i=-3\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}+4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (85.02)$$

и, согласно (66.07),

$$(c^2+4U)\,T^{0i}=\rho v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right\}-\frac{1}{c^2}p_{ik}v_k. \quad (85.03)$$