творяет соотношению

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0. \tag{85.47}$$

В формуле (84.40) для пространственных компонент, которую можно написать в виде

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho x_i x_k (dx)^3 -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)(dx)^3 + \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{c^3 r^4}, \tag{85.48}$$

оставлены члены порядка $\frac{1}{c^3}$ $\left(\text{точнее, порядка } \frac{q^4}{c^3}\right)$ и отброшены члены более высокого порядка. Если написать с той же точностью и величину $\mathfrak{g}^{0i}$, то, как нетрудно проверить, будет выполняться и соотношение

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{85.49}$$

§ 86. Решения волнового уравнения в волновой зоне

Предыдущие выражения для потенциалов тяготения применимы на „умеренно-больших" расстояниях от системы тел. Как уже было объяснено в начале § 84, под этим разумеются расстояния, большие по сравнению с размерами системы тел, но малые по сравнению с длиной испускаемых системой волн. Если же расстояния велики даже по сравнению с длиной испускаемых системой волн, то мы имеем дело с „волновой зоной". В волновой зоне уже недопустимо рассматривать в волновом уравнении член со второй производной по времени как поправочный, и решение должно строиться иначе.

В случае Солнечной системы „умеренно-большими" являются расстояния вплоть до ближайших звезд, т. е. вплоть до областей пространства, где систему нельзя считать изолированной. Поэтому, практически, при изучении Солнечной системы за пределы умеренно-больших расстояний выходить не приходится. Однако в некоторых теоретических вопросах, например, в вопросе об излучении гравитационных волн, или в вопросе об однозначности решений уравнений тяготения, приходится рассматривать расстояния, попадающие в волновую зону и сколь угодно большие в математическом смысле.

Прежде чем переходить к решению уравнений Эйнштейна на сколь угодно больших расстояниях, разъясним понятия „умеренно-больших расстояний" и „волновой зоны" на примере простого волнового уравнения со свободным членом

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma. \tag{86.01}$$

В теории тяготения аналогом ψ является разность между $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и его предельным значением на бесконечности.

Если считать „плотность“ σ известной, то можно написать интересующее нас решение в виде запаздывающего потенциала

$$\psi = \int \frac{[\sigma]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx')^3, \tag{86.02}$$

где

$$[\sigma] = \sigma(t', \mathbf{r}'), \tag{86.03}$$

причем

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{86.04}$$

То, что мы берем именно это, а не другое решение, соответствует нашим представлениям об изолированности системы и о том, что единственным источником волн являются тела, составляющие систему. Точный вид начальных условий здесь не существенен; достаточно предположить, что начальное возмущение было сосредоточено в конечной области, окружающей систему, и что мы рассматриваем такие времена и расстояния, когда и на которых начальное возмущение уже разошлось.

Предположим, что плотность σ имеет, с одной стороны, производные по времени различных порядков и, с другой стороны, „моменты“ различных порядков, для которых введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \mu_0(\tau) &= \int \sigma(\tau, \mathbf{r}') (dx')^3, \\ \mu_i(\tau) &= \int x_i' \sigma(\tau, \mathbf{r}') (dx')^3, \\ \mu_{ik}(\tau) &= \int x_i' x_k' \sigma(\tau, \mathbf{r}') (dx')^3, \end{aligned}\right\} \tag{86.05}$$

где τ есть некоторая величина, не зависящая от $\mathbf{r}'$.

Применявшийся нами в предыдущих параграфах прием для решения волнового уравнения сводился к разложению аргумента t' в функции σ и самой этой функции по обратным степеням c. Так как при таком разложении под интегралом появляются возрастающие степени $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, то ясно, что этот прием дает хорошо сходящийся ряд лишь для „умеренно-больших“ расстояний r. (Область быстрой сходимости ряда и дает уточнение этого понятия.) Каждый член ряда может быть в свою очередь разложен по обратным степеням r, причем в коэффициенты разложения войдут „моменты“ (86.05), вычисленные для $\tau = t$.

Но можно выделить в выражении (86.04) для t' величину

$$\tau = t - \frac{r}{c} \tag{86.06}$$

и писать t' в виде

$$t' = \tau + \frac{1}{c} (r - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \tag{86.07}$$

Тогда, разлагая t' и σ по степеням $\frac{1}{c}$, *лишь поскольку эта величина не входит в* τ, мы получим ряд другого вида, притом такой, который сходится при сколь угодно больших значениях r.

Если мы в этом ряде возьмем совокупность членов, медленнее всего убывающих при возрастании r, то мы получим выражение для ψ, справедливое в волновой зоне, т. е. при весьма больших значениях r. Сохранение лишь наиболее медленно убывающих членов соответствует замене величины (86.07) выражением

$$t' = \tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \tag{86.08}$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad n_i = \frac{x_i}{r} \tag{86.09}$$

есть единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$. Таким путем мы получим для ψ выражение вида

$$\psi = \frac{1}{r} \mu(\tau, \mathbf{n}), \tag{86.10}$$

где

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \int \sigma\left(\tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \mathbf{r}'\right)(dx')^3 \tag{86.11}$$

есть функция от *трех* аргументов: величины τ и двух углов, через которые выражается $\mathbf{n}$. Заметим, что если μ есть произвольная функция от этих трех аргументов, то ψ будет приближенным решением однородного волнового уравнения.

Если существуют моменты (86.05), то мы можем написать следующее разложение для μ:

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \mu_0 + \frac{n_i}{c} \dot{\mu}_i + \frac{1}{2} \frac{n_i n_k}{c^2} \ddot{\mu}_{ik} + \ldots \tag{86.12}$$

или

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \mu_0 + \frac{x_i}{cr} \dot{\mu}_i + \frac{1}{2} \frac{x_i x_k}{c^2 r^2} \ddot{\mu}_{ik} + \ldots, \tag{86.13}$$

где точками обозначены производные от величин (86.05) по своему аргументу τ, или, что то же, по времени t.

Та область, где решение волнового уравнения ψ с большой точностью выражается в форме (86.10), и носит название волновой зоны.

В том случае, когда размеры системы малы по сравнению с длиной излучаемых ею волн, разложение (86.12) быстро сходится, причем главным членом будет первый, отличный от нуля. Если таковым является μ_0, то функция ψ будет обладать сферической симметрией.