§ 87. Потенциалы тяготения в волновой зоне

Обратимся теперь к уравнениям Эйнштейна, выписанным в § 68. Введем, согласно (68.13), обозначение

$$N^{\mu\nu} = \left(\frac{-g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}L\right\}, \tag{87.01}$$

где L есть функция Лагранжа:

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}y_\nu y^\nu, \tag{87.02}$$

а другие величины имеют следующие значения:

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\rho} + \mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\rho} - \mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right), \tag{87.03}$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\lambda}\Pi^{\nu,\mu\lambda}, \tag{87.04}$$

$$y_\nu = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\nu}; \quad y^\nu = g^{\mu\nu}y_\mu. \tag{87.05}$$

Тогда уравнения Эйнштейна в гармонических координатах напишутся

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = -\frac{1}{2c^2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}. \tag{87.06}$$

Мы должны исследовать асимптотический вид решений этих уравнений на больших расстояниях. Для этого рассмотрим сперва волновое уравнение

$$\sqrt{-g}\,\Box\,\psi \equiv \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \tag{87.07}$$

и заменим в нем коэффициенты $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ их „статическими“ значениями, причем будем для простоты считать, что начало координат лежит в центре тяжести системы масс. Мы можем здесь воспользоваться выражениями (85.41), (85.46) и (85.48), в которых, однако, мы отбросим все члены, убывающие быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а из членов порядка $\frac{1}{r}$ сохраним (пока) только статический. Вводя гравитационный радиус массы

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2} \tag{87.08}$$

и переходя к сферическим координатам, связанным с гармоническими обычными формулами (57.03), мы напишем волновое уравнение (87.07) в виде

$$\Box^0\psi = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta^*\psi\right) = 0. \tag{87.09}$$

Здесь $\Delta^*\psi$ есть обычный оператор Лапласа на шаре [формула (57.06)]. Нас интересуют решения типа расходящихся волн. Для них величина $\frac{\Delta^*\psi}{r^2}$ будет на бесконечности убывать быстрее остальных членов уравнения, и мы можем ее отбросить, после чего уравнение (86.22) напишется

$$\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0. \tag{87.10}$$

Независимыми переменными будут здесь только r и t, а углы ϑ, φ будут входить только как параметры.

Производя подстановку

$$r\psi=f \tag{87.11}$$

и вводя вместо r переменную

$$r^*=r+2\alpha(\lg r-\lg r_0), \tag{87.12}$$

где r_0 — некоторая константа, мы получим, с точностью до малых величин,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial r^{*2}}=0. \tag{87.13}$$

Решением типа расходящейся волны будет

$$f=f(\tau,\ \mathbf{n}), \tag{87.14}$$

где $\mathbf{n}$ есть попрежнему единичный вектор (86.09), а τ имеет теперь значение

$$\tau=t-\frac{1}{c}r^* \tag{87.15}$$

или

$$\tau=t-\frac{1}{c}\left(r+2\alpha\lg\left(\frac{r}{r_0}\right)\right). \tag{87.16}$$

Таким образом, решение уравнения (87.09) типа расходящейся волны имеет асимптотический вид

$$\psi=\frac{1}{r}f(\tau,\ \mathbf{n}), \tag{87.17}$$

причем величина τ предполагается здесь конечной, тогда как r неограниченно возрастает.

При этих условиях асимптотические значения производных от ψ по координатам и времени вычисляются так, как если бы функция ψ зависела от них только через посредство τ. Полагая

$$k_\alpha=\frac{\partial\tau}{\partial x_\alpha}, \tag{87.18}$$

будем иметь в рассматриваемом приближении

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}=k_\alpha\psi. \tag{87.19}$$

Пренебрегая членами порядка $\frac{\alpha}{r}$ по сравнению с единицей, мы можем считать величины k_α равными

$$k_0 = 1; \quad k_i = -\frac{n_i}{c}. \tag{87.20}$$

В соответствии с этим можем положить

$$k^0 = \frac{1}{c^2}; \quad k^i = +\frac{n_i}{c}, \tag{87.21}$$

откуда

$$k_\alpha k^\alpha = 0. \tag{87.22}$$

Величины k_α будут пропорциональны составляющим нулевого четырехмерного вектора (в галилеевом пространстве, соответствующем предельным значениям $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$).

Добавим теперь в коэффициентах волнового уравнения (87.09) к статическим значениям $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ волновую часть $b^{\mu\nu}$ и положим

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\alpha}{cr} + b^{00}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= b^{0i} \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + b^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{87.23}$$

Относительно величин $b^{\mu\nu}$ мы будем предполагать, что в волновой области они будут либо иметь вид (87.17), либо, во всяком случае, удовлетворять условию (87.19). Поэтому мы можем вычислять производные от $b^{\mu\nu}$ по формуле

$$\frac{\partial b^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{b}^{\mu\nu}, \tag{87.24}$$

а так как производные от статических членов в $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ будут убывать как $1/r^2$ и могут быть отброшены, то будет и

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{b}^{\mu\nu}. \tag{87.25}$$

Условия гармоничности для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ напишутся

$$k_\mu \dot{b}^{\mu\nu} = 0 \tag{87.26}$$

и могут быть проинтегрированы по τ. Так как статическая часть $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ нами уже выделена, то постоянные интегрирования могут быть положены равными нулю, и мы получим

$$k_\mu b^{\mu\nu} = 0. \tag{87.27}$$

Отсюда смешанные и временна́я компонента величин $b^{\mu\nu}$ выражаются через пространственные компоненты по формулам

$$b^{0i} = \frac{n_k}{c} b^{ik}; \quad b^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} b^{ik}. \tag{87.28}$$

Уточненный вид умноженного на $\frac{1}{c}\sqrt{-g}$ оператора Даламбера, получаемый в результате подстановки коэффициентов $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ из (87.23) в формулу (87.07), напишется:

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}\cdot\Box\psi = \Box^{\circ}\psi + \frac{1}{c}\,b^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \tag{87.29}$$

Но если ψ — функция типа расходящейся волны, которая зависит от координат и времени главным образом через посредство τ и удовлетворяет соотношению (87.19), то будет

$$b^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = k_\alpha k_\beta b^{\alpha\beta} = 0 \tag{87.30}$$

вследствие (87.27). Поэтому дополнительный член в операторе Даламбера (87.29) будет равен нулю в отдельности, и мы можем вести исследование решений типа расходящейся волны так, как если бы в коэффициентах оператора Даламбера в волновом уравнении (87.07) и в уравнениях Эйнштейна (87.06) имелась только статическая часть. Тем самым мы как бы освобождаемся от не-линейной части членов, содержащих вторые производные в уравнениях Эйнштейна.

Переходим к рассмотрению не-линейных членов, содержащих первые производные. Мы не можем их отбросить с самого начала, так как в волновой зоне они убывают не быстрее, чем $1/r^2$, и могут сильно влиять на асимптотический вид решения. Но при вычислении их мы можем внести те упрощения, которые вытекают из формулы (87.25) и из того обстоятельства, что вне знака производных компоненты фундаментального тензора могут быть заменены их предельными значениями. Поднимая и опуская значки при помощи этих предельных значений, мы можем писать, например,

$$k^\alpha = g^{\alpha\beta}k_\beta; \quad \dot{b}^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\alpha}\dot{b}^{\mu\nu} \text{ и т. д.} \tag{87.31}$$

как если бы соответствующие величины были тензорами. Используя строгую формулу

$$y_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\,\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}, \tag{87.32}$$

мы можем тогда написать:

$$y_\alpha = \frac{k_\alpha}{2c}\,\dot{b}^{\nu}_{\nu}; \quad y^\alpha = \frac{k^\alpha}{2c}\,\dot{b}^{\nu}_{\nu}. \tag{87.33}$$

Величины (87.03) и (87.04) будут равны

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}\left(k^\alpha\dot{b}^{\mu\beta} + k^\beta\dot{b}^{\mu\alpha} - k^\mu\dot{b}^{\alpha\beta}\right), \tag{87.34}$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}\left(k_\alpha\dot{b}^{\nu}_{\beta} + k_\beta\dot{b}^{\nu}_{\alpha} - k^\nu\dot{b}_{\alpha\beta}\right). \tag{87.35}$$

Из соотношений (87.22) и (87.26) вытекает

$$k_\nu\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = 0; \quad y_\nu y^\nu = 0. \tag{87.36}$$

Поэтому значение функции Лагранжа в волновой зоне равно нулю

$$L = 0, \tag{87.37}$$

как это имеет место и для электромагнитных волн.

Перемножая три члена в (87.34) на три члена в (87.35), получаем девять сумм, из которых, однако, только одна отлична от нуля, а именно

$$\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta}. \tag{87.38}$$

Подставляя найденные выражения в (87.01) и заменяя множитель $\left(\frac{-g}{c^2}\right)$ единицей, получим

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87.39}$$

Для нас существенны следующие свойства выражения $N^{\mu\nu}$. С одной стороны, оно пропорционально произведению $k^\mu k^\nu$ и, будучи подставлено в уравнения Эйнштейна (87.06), может породить в $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и в $\dot{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}$, а также в $b^{\mu\nu}$ и в $\dot{b}^{\mu\nu}$ только члены, пропорциональные такому же произведению. С другой стороны, если добавить к $\dot{b}^{\mu\nu}$ члены, пропорциональные $k^\mu k^\nu$, т. е. сделать замену

$$\dot{b}^{\alpha\beta} \to \dot{b}^{\alpha\beta} + \lambda k^\alpha k^\beta, \tag{87.40}$$

то в силу условий гармоничности (87.26) и соотношения (87.22) величина $N^{\mu\nu}$ не изменится. Это позволяет свести нахождение асимптотического вида $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ при учете нелинейных членов к решению линейных уравнений.

Положим

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma}\left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87.41}$$

Как будет видно из дальнейшего, эта величина играет роль плотности энергии гравитационных волн. Формула (87.39) напишется тогда:

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\sigma_g k^\mu k^\nu. \tag{87.42}$$

Подставляя это выражение в уравнения Эйнштейна (86.19), получим

$$\frac{1}{2c}\Box\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}(T^{\mu\nu} + \sigma_g k^\mu k^\nu). \tag{87.43}$$

В предыдущих параграфах при составлении тензора массы мы полностью пренебрегли электромагнитной энергией. Если же мы примем во внимание энергию электромагнитного излучения системы тел, то, обозначив плотность ее через σ_{em}, так что

$$\sigma_{em} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \tag{87.44}$$

мы получим для тензора электромагнитной энергии в волновой зоне выражение

$$T^{\mu\nu} = \sigma_{em} k^{\mu} k^{\nu} \tag{87.45}$$

(мы сохранили для этого тензора обозначение $T^{\mu\nu}$, так как в волновой зоне весь тензор массы сводится к (87.45), а та его часть, которая соответствует веществу, равна нулю).

Таким образом, мы можем писать уравнения Эйнштейна в волновой зоне в виде

$$\frac{1}{2c} \Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \sigma k^{\mu} k^{\nu}, \tag{87.46}$$

где под σ мы можем разуметь сумму $\sigma_{em} + \sigma_g$, если мы учитываем электромагнитное излучение, или только σ_g, если мы имеем дело с чисто гравитационной задачей.

Чтобы решить уравнения (87.46), выделим в $b^{\mu\nu}$ член, пропорциональный $k^{\mu}k^{\nu}$, и будем писать $b^{\mu\nu}$ в виде

$$b^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + h k^{\mu} k^{\nu}. \tag{87.47}$$

Как было уже отмечено, выражение (87.41) для σ_g не меняется при замене $b^{\mu\nu}$ на $h^{\mu\nu}$, так что мы будем иметь

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma} \left(\dot{h}^{\alpha\beta} \dot{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{h}^{\alpha}_{\alpha} \dot{h}^{\beta}_{\beta} \right). \tag{87.48}$$

Соотношения (87.27) и (87.28) также остаются в силе; мы можем написать

$$k_{\nu} h^{\mu\nu} = 0. \tag{87.49}$$

Входящие в (87.47) величины $h^{\mu\nu}$ и h мы можем подчинить уравнениям:

$$\Box h^{\mu\nu} = 0, \tag{87.50}$$

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{c} \sigma, \tag{87.51}$$

в которых, согласно сделанному выше замечанию, мы можем заменить оператор $\Box$ на линейный оператор $\Box^0$ [формула (87.09)].

Тогда величины $h^{\mu\nu}$ будут удовлетворять *линейному* волновому уравнению, и на основании (87.17) мы можем потребовать, чтобы они имели асимптотический вид

$$h^{\mu\nu} = \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{\mu\nu}(\tau, \mathbf{n}). \tag{87.52}$$

Коэффициент $\frac{2\gamma}{c^3}$ добавлен здесь для удобства оценки порядка величины $h^{\mu\nu}$; пространственные компоненты f^{ik} будут тогда порядка кинетической энергии системы.

Подставляя эти значения $h^{\mu\nu}$ в (87.48), мы получим для σ_g выражение, обратно пропорциональное r^2. Того же вида будет зависимость от r и для электромагнитной части плотности энергии. Поэтому и вся плотность энергии σ в уравнении (87.51) будет вида

$$\sigma = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{r^2}. \tag{87.53}$$

Гравитационная часть σ_{0g} функции σ_0 выражается через величины $f^{\mu\nu}$ по формуле, аналогичной (87.48), а именно:

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left(\dot{f}^{\alpha\beta}\dot{f}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{f}^{\alpha}_{\alpha}\dot{f}^{\beta}_{\beta}\right). \tag{87.54}$$

Подставляя выражение (87.53) для σ в уравнение (87.51), получим для h уравнение

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{cr^2}\sigma_0(\tau, \mathbf{n}), \tag{87.55}$$

правую часть которого можно считать известной. Таким образом, не только величины $h^{\mu\nu}$, но и величина h удовлетворяет *линейному* уравнению. Асимптотический вид решения этого уравнения будет

$$h = \frac{8\pi\gamma \lg r}{r}\int^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathbf{n})\,d\tau + \frac{h_0(\tau, \mathbf{n})}{r}. \tag{87.56}$$

Положим

$$4\pi c\int_{\tau}^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathbf{n})\,d\tau = \Delta\mathscr{E}(\tau, \mathbf{n}). \tag{87.57}$$

Умноженное на $\frac{d\Omega}{4\pi}$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, это выражение дает утечку энергии в этот телесный угол, лежащий в направлении $\mathbf{n}$, происшедшую за время $\tau - \tau_0$. Результат подстановки выражения (87.57) в предыдущую формулу может быть записан в виде

$$h = \frac{2\gamma}{cr}\left(\lg r\,\Delta\mathscr{E}(\tau, \mathbf{n}) + \varepsilon(\tau, \mathbf{n})\right), \tag{87.58}$$

где величину $\varepsilon(\tau, \mathbf{n})$ можно считать того же порядка, как $\Delta\mathscr{E}(\tau, \mathbf{n})$ (или же ее можно не писать, а в формулах для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ отнести соответствующие члены к $f^{\mu\nu}$).

Подставляя значения (87.52) и (87.58) для $h^{\mu\nu}$ и h сперва в формулу (87.47) для $b^{\mu\nu}$, а затем в формулы (87.23) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, мы получим следующие асимптотические выражения величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в волновой зоне:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{00} + \frac{2\gamma}{c^5 r}(\lg r\,\Delta\mathcal{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{0i} + \frac{2\gamma}{c^4 r} n_i(\lg r\,\Delta\mathcal{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} n_i n_k(\lg r\,\Delta\mathcal{E} + \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (87.59)$$

Здесь величины f^{0i} и f^{00} выражаются через f^{ik} по формулам, аналогичным (87.28), а именно

$$f^{0i} = \frac{n_k}{c} f^{ik}; \quad f^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} f^{ik}. \quad (87.60)$$

Сравним выражения величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в волновой зоне с их выражениями на умеренно-больших расстояниях, полученными в § 85. Здесь мы можем прежде всего пренебречь членами, содержащими $\lg r$ и происходящими от утечки энергии. Что касается остальных членов, то мы их можем написать в таком виде, чтобы они переходили в соответствующие члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). Для этого положим

$$D_{ik}(t) = \int \rho x_i x_k (dx)^3, \quad (87.61)$$

заменим здесь t на τ и свяжем f^{ik} с $D_{ik}(\tau)$ соотношением

$$f^{ik} = \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ik}(\tau). \quad (87.62)$$

Тогда формулы

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial t} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{D_{ik}(\tau)}{r} \end{aligned}\right\} \quad (87.63)$$

в волновой зоне переходят в (87.59) (без членов, происходящих от утечки энергии), а на умеренно-больших расстояниях они дают главные члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). При этом на умеренно-больших расстояниях в выражении (87.15) для τ может быть опущен логарифмический член (r^* может быть заменено на r).

§ 88. Общие замечания о законах сохранения

Гравитационная энергия играет в теории тяготения совершенно особую роль, отличную от роли всех других видов энергии. Она не входит явным образом в тензор энергии, а учитывается косвенным образом, через посредство потенциалов тяготения. Наличие