зоне:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{00} + \frac{2\gamma}{c^5 r}(\lg r\,\Delta\mathscr{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{0i} + \frac{2\gamma}{c^4 r} n_i(\lg r\,\Delta\mathscr{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} n_i n_k(\lg r\,\Delta\mathscr{E} + \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{87.59}$$

Здесь величины f^{0i} и f^{00} выражаются через f^{ik} по формулам, аналогичным (87.28), а именно

$$f^{0i} = \frac{n_k}{c} f^{ik}; \quad f^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} f^{ik}. \tag{87.60}$$

Сравним выражения величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в волновой зоне с их выражениями на умеренно-больших расстояниях, полученными в § 85. Здесь мы можем прежде всего пренебречь членами, содержащими $\lg r$ и происходящими от утечки энергии. Что касается остальных членов, то мы их можем написать в таком виде, чтобы они переходили в соответствующие члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). Для этого положим

$$D_{ik}(t) = \int \rho x_i x_k (dx)^3, \tag{87.61}$$

заменим здесь t на τ и свяжем f^{ik} с $D_{ik}(\tau)$ соотношением

$$f^{ik} = \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ik}(\tau). \tag{87.62}$$

Тогда формулы

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial t} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{D_{ik}(\tau)}{r} \end{aligned}\right\} \tag{87.63}$$

в волновой зоне переходят в (87.59) (без членов, происходящих от утечки энергии), а на умеренно-больших расстояниях они дают главные члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). При этом на умеренно-больших расстояниях в выражении (87.15) для τ может быть опущен логарифмический член (r^* может быть заменено на r).

§ 88. Общие замечания о законах сохранения

Гравитационная энергия играет в теории тяготения совершенно особую роль, отличную от роли всех других видов энергии. Она не входит явным образом в тензор энергии, а учитывается косвенным образом, через посредство потенциалов тяготения. Наличие гравитационного поля и связанной с ним энергии проявляется, как мы знаем, в изменении свойств пространства и времени. Выделить гравитационную энергию в виде добавочных членов в тензоре энергии можно только искусственно, фиксировав координатную систему и видоизменив постановку задачи, а именно рассматривая поле тяготения как бы вложенным в пространство-время с фиксированными свойствами (как это делалось в теории Ньютона). Соответствующие гравитационной энергии добавочные члены в тензоре энергии не будут обладать свойством ковариантности (т. е. не будут тензором). В зависимости от выбора координатной системы значения этих добавочных членов в данной точке пространства-времени могут оказаться равными или неравными нулю (чего не может быть с тензором). Поэтому гравитационную энергию нельзя локализовать. Это свойство гравитационной энергии физически проявляется в том, что *гравитационное поле нельзя заслонить*. Чтобы избавиться от действия гравитационного поля, можно только отойти подальше от масс, его производящих. Это можно сделать для изолированной системы масс. Порождаемое такой системой гравитационное поле можно рассматривать, как местную неоднородность в бесконечном евклидовом пространстве (или в галилеевом пространстве-времени). При таком рассмотрении можно (пренебрегая излучением, о котором будет сказано ниже) составить десять интегралов уравнений Эйнштейна, соответствующих десяти классическим интегралам уравнений механики. Четыре из них — интегралы энергии и количества движения — будут составлять четырехмерный вектор в галилеевом пространстве-времени, в которое погружена система масс с ее гравитационным полем. Шесть остальных интегралов будут составлять в том же пространстве-времени антисимметричный тензор; это будут интегралы момента количества движения и интегралы движения центра инерции системы.

Важно отметить, что существование десяти интегралов движения связано с изотропностью галилеева пространства-времени, в которое погружена система, а значит и с евклидовостью пространства на бесконечности. Отказ от требований изотропности и евклидовости на бесконечности влечет за собой нарушение всех или некоторых из законов сохранения, выражаемых десятью интегралами движения. С физической точки зрения это совершенно естественно, поскольку изотропность и евклидовость на бесконечности служат выражением изолированности системы, а выполнения законов сохранения можно ожидать только тогда, когда система изолирована.

Следует указать еще на одну причину, в силу которой система движущихся масс никогда не будет вполне изолированной в активном смысле (т. е. в смысле отдачи энергии, а не ее получения извне). Эта причина состоит в излучении системой электромагнитных и гравитационных волн (а также, быть может, и других). Однако для систем, подобных Солнечной системе, потеря энергии на излучение даже на протяжении геологических периодов времени весьма мала по сравнению с имеющимся запасом энергии, хотя в абсолютных цифрах представляет внушительную величину (для Солнца излучаемая мощность соответствует ежесекундному превращению четырех миллионов тонн вещества в излучение). Что касается излучения гравитационных волн, то оно совершенно ничтожно: грубый подсчет по формулам, основанным на результатах предыдущего параграфа, показывает, что мощность, излучаемая Солнечной системой в виде гравитационных волн, в 10^{23} или 10^{24} раз меньше излучаемой в виде электромагнитных волн и составляет всего-навсего примерно один киловатт. (Такой подсчет будет произведен в § 90). Поэтому во всех рассуждениях, кроме, быть может, чисто теоретических, действием гравитационных волн можно целиком пренебречь. Этот результат показывает, в частности, что изученная в главе VI задача о движении системы тяготеющих масс может рассматриваться как задача механики (без учета излучения) не только в том приближении, в каком она была там решена, но и в следующих приближениях (не представляющих, впрочем, практического интереса).

§ 89. Формулировка законов сохранения

В теории, оперирующей с галилеевым пространством-временем, классические законы сохранения могли быть написаны в дифференциальной форме, а именно в виде соотношений (31.10). Обобщением их является соотношение

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad (89.01)$$

которое, согласно (41.25), можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \qquad (89.02)$$

Однако соотношение (89.01) не приводит, само по себе, к законам сохранения. Математическая причина этого состоит в том, что наличие второго члена в (89.02), стоящего вне знака производной, не позволяет, в общем случае, заключить о постоянстве какого-либо объемного интеграла (см. § 49). Физической же причиной является тот факт, что поле тяготения само обладает энергией, которая не входит явно в $T^{\mu\nu}$, но которую тем не менее необходимо учитывать в общем балансе.

Чтобы получить соотношение, в котором была бы учтена также и гравитационная энергия, рассмотрим уравнения тяготения Эйнштейна, выписанные в начале § 87.

Мы имеем

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = -\frac{1}{2c^2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu}, \qquad (89.03)$$