даже на протяжении геологических периодов времени весьма мала по сравнению с имеющимся запасом энергии, хотя в абсолютных цифрах представляет внушительную величину (для Солнца излучаемая мощность соответствует ежесекундному превращению четырех миллионов тонн вещества в излучение). Что касается излучения гравитационных волн, то оно совершенно ничтожно: грубый подсчет по формулам, основанным на результатах предыдущего параграфа, показывает, что мощность, излучаемая Солнечной системой в виде гравитационных волн, в 10^{23} или 10^{24} раз меньше излучаемой в виде электромагнитных волн и составляет всего-навсего примерно один киловатт. (Такой подсчет будет произведен в § 90). Поэтому во всех рассуждениях, кроме, быть может, чисто теоретических, действием гравитационных волн можно целиком пренебречь. Этот результат показывает, в частности, что изученная в главе VI задача о движении системы тяготеющих масс может рассматриваться как задача механики (без учета излучения) не только в том приближении, в каком она была там решена, но и в следующих приближениях (не представляющих, впрочем, практического интереса).

§ 89. Формулировка законов сохранения

В теории, оперирующей с галилеевым пространством-временем, классические законы сохранения могли быть написаны в дифференциальной форме, а именно в виде соотношений (31.10). Обобщением их является соотношение

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{89.01}$$

которое, согласно (41.25), можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{89.02}$$

Однако соотношение (89.01) не приводит, само по себе, к законам сохранения. Математическая причина этого состоит в том, что наличие второго члена в (89.02), стоящего вне знака производной, не позволяет, в общем случае, заключить о постоянстве какого-либо объемного интеграла (см. § 49). Физической же причиной является тот факт, что поле тяготения само обладает энергией, которая не входит явно в $T^{\mu\nu}$, но которую тем не менее необходимо учитывать в общем балансе.

Чтобы получить соотношение, в котором была бы учтена также и гравитационная энергия, рассмотрим уравнения тяготения Эйнштейна, выписанные в начале § 87.

Мы имеем

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = -\frac{1}{2c^2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu}, \tag{89.03}$$

где $N^{\mu\nu}$ определяется формулами (87.01)—(87.05). С другой стороны, в гармонической системе координат

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}-\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \qquad (89.04)$$

Прибавляя это равенство, умноженное на $\frac{1}{2c^2}$, к предыдущему, получим

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = L^{\mu\nu}, \qquad (89.05)$$

где

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \qquad (89.06)$$

В произвольной системе координат равенство (89.05) будет тождеством, если разуметь под $L^{\mu\nu}$ выражение

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}+\frac{1}{2c^2}\left(-\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\beta}\right), \qquad (89.07)$$

которое переходит в предыдущее, если система координат — гармоническая. Для доказательства тождества (89.05) нужно брать для тензора Эйнштейна полное выражение (Б.87), выведенное в Добавлении Б.

Если воспользоваться уравнениями Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{\mu\nu} \qquad (89.08)$$

и положить

$$U^{\mu\nu} = \left(-\frac{g}{c^2}\right)T^{\mu\nu}+\frac{c^2}{8\pi\gamma}L^{\mu\nu}, \qquad (89.09)$$

можно написать формулу (89.05) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = 16\pi\gamma U^{\mu\nu}. \qquad (89.10)$$

Здесь слева стоит выражение, подобное тензору Круткова, рассмотренному в § 31; сумма производных по x_μ от левой части (89.10) тождественно равна нулю. Поэтому мы имеем

$$\frac{\partial U^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (89.11)$$

Совокупность величин $U^{\mu\nu}$ не составляет общековариантного тензора. Это есть тензор только по отношению к линейным преобразованиям; в частности, $U^{\mu\nu}$ есть тензор в гармонической системе координат. Становясь на ту, несколько искусственную, точку зрения, которая была упомянута в начале предыдущего параграфа, можно толковать в формуле (89.09) деленный на c^2 второй член как тензор энергии гравитационного поля, а деленный на c^2 первый член — как тензор энергии вещества и всех других полей, кроме гравитационного. Если допускать и другие системы координат, помимо гармонической, то такое толкование будет не вполне однозначным, если рассматривать области внутри системы масс. Но на больших расстояниях от масс, где пространство-время почти псевдо-евклидово и координаты по условию галилеевы, физический смысл величин $U^{\mu\nu}$ становится во всяком случае однозначным.

Вытекающие из (89.11) законы сохранения в интегральной форме также получаются вполне однозначно и не зависят от произвола, связанного с допускаемыми внутри системы масс отклонениями координатной системы от гармонической. Как мы увидим, это обусловлено тем, что объемные интегралы, выражающие энергию, количество движения и другие величины, могут быть преобразованы в интегралы по поверхности, окружающей систему масс.

Переходим к выводу интегральной формы законов сохранения. Для этого умножим левую часть (89.11) на евклидов элемент объема

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = (dx)^3 \tag{89.12}$$

и проинтегрируем по некоторому достаточно большому объему, включающему систему масс. Размеры области интегрирования мы оставим пока неопределенными.

После применения теоремы Гаусса — Остроградского мы получим равенства вида

$$\frac{d}{dt}\int U^{00}(dx)^3 = -\int n_i U^{0i}\,dS, \tag{89.13}$$

$$\frac{d}{dt}\int U^{0i}(dx)^3 = -\int n_k U^{ik}\,dS, \tag{89.14}$$

где n_i есть вектор нормали к поверхности. Если поверхность, ограничивающая объем, есть сфера, мы можем положить

$$n_i = \frac{x_i}{r}; \quad dS = r^2\,d\omega, \tag{89.15}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла.

Вследствие симметрии величин $U^{\mu\nu}$, из формул (89.11) вытекают также соотношения, аналогичные (31.06) и (31.01), которые после интегрирования дают:

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{jk} - x_k U^{ji})\,dS, \tag{89.16}$$

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{00} - tU^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{j0} - tU^{ji})\,dS. \tag{89.17}$$

Выясним физический смысл объемных интегралов, стоящих в левой части этих уравнений. Положим *)

$$\overset{*}{M} = c^2 \int U^{00} (dx)^3, \tag{89.18}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = c^2 \int U^{0i} (dx)^3, \tag{89.19}$$

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = c^2 \int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) (dx)^3, \tag{89.20}$$

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = c^2 \int (x_i U^{00} - t U^{0i}) (dx)^3. \tag{89.21}$$

[Мы обозначили величины (89.18) — (89.21) звездочками сверху, чтобы не смешивать их с константами, введенными при решении уравнений механики.] Величина $\overset{*}{M}$ есть полная масса системы, включая массу, принадлежащую полю, заключенному внутри данного объема. Величины $\overset{*}{P}{}^i$ представляют количество движения, а величины $\overset{*}{M}{}^{ik}$ — момент количества движения системы. Величины $\overset{*}{M}{}^{i0}$ можно написать в виде

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = \overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i - \overset{*}{P}{}^i t, \tag{89.22}$$

где $\overset{*}{X}{}^i$ — координата центра тяжести системы. Отсюда ясно, что $\overset{*}{M}{}^{i0}$ представляют величины, входящие в закон движения центра тяжести.

Значение объемных интегралов (89.18) — (89.21) может несколько изменяться в зависимости от размеров области интегрирования. Это происходит в силу того, что поле также обладает энергией, количеством движения, и т. д. Однако из дальнейшего (§ 90) будет ясно, что при надлежащем выборе области интегрирования возникающая отсюда неопределенность в значении интегралов ничтожна по сравнению с самими этими значениями.

Покажем теперь, что не только производные по времени от величин (89.18)—(89.21), но и сами эти величины могут быть представлены в виде интегралов по поверхности. Чтобы выяснить это, рассмотрим структуру выражений (89.10) для $U^{\mu\nu}$. Полагая $\mu = \nu = 0$, будем иметь

$$16\pi\gamma U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{\beta 0}). \tag{89.23}$$

При $\alpha = \beta = 0$, а также при $\alpha = 0$, $\beta = i$ (где $i = 1, 2, 3$) выражение справа обращается в нуль. Поэтому фактически значки α, β в (89.23) пробегают только пространственные значения, и мы можем написать

$$16\pi\gamma U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0}), \tag{89.24}$$

*) Мы будем писать здесь при M^{ik}, P^i, X^i верхние значки.

откуда

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\, dS. \tag{89.25}$$

Аналогично (89.24), мы будем иметь

$$16\pi\gamma U^{0i} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_j} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}), \tag{89.26}$$

где j пробегает только пространственные значения, а α — также и значение $\alpha = 0$ (заметим, что значение $\alpha = i$ фактически отсутствует). Подстановка (89.26) в объемный интеграл (89.19) дает

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\, dS. \tag{89.27}$$

Из формулы (89.26) легко выводится соотношение

$$16\pi\gamma (x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - {} \right.$$
$$\left. - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k} \right\}, \tag{89.28}$$

правая часть которого представляет сумму производных по пространственным координатам. Подставляя (89.28) в (89.20) и применяя теорему Гаусса — Остроградского, получаем для момента количества движения выражение в виде интеграла по поверхности:

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \left\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - {} \right.$$
$$\left. - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k} \right\} dS. \tag{89.29}$$

Наконец, первый член выражения (89.22) для $\overset{*}{M}{}^{i0}$ может быть написан в виде

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \left\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{k0}) + {} \right.$$
$$\left. + \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{i0} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{00} \right\} dS. \tag{89.30}$$

Таким образом, все величины (89.18) — (89.21) представлены в виде поверхностных интегралов. Значения их зависят только от поведения потенциалов тяготения на больших расстояниях.

При написании законов сохранения в дифференциальной форме мы использовали симметричную систему *) величин $U^{\mu\nu}$, определяемых формулой (89.09); эти величины представляют, как мы указывали, аналог контравариантного симметричного тензора. В литературе

*) Симметричная система величин используется также в книге Л. Ландау и Е. Лифшица „Теория поля“ [23].

принято, однако, начиная с первых работ Эйнштейна, пользоваться другой системой величин, представляющих аналог смешанного (несимметричного) тензора и определяемых следующим образом.

В конце § 60 была выведена формула для вариации интеграла действия, согласно которой

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{89.31}$$

Здесь L есть функция Лагранжа (60.23), а через (dx) обозначено произведение четырех дифференциалов

$$(dx) = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{89.32}$$

Вследствие

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{89.33}$$

формулу (89.31) можно также написать в виде

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = -\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{89.34}$$

Полагая

$$g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}, \tag{89.35}$$

мы можем определить „частные производные“ по $g^{\mu\nu}_\sigma$ и по $g^{\mu\nu}$ формулой

$$\delta(L\sqrt{-g}) = \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma}\delta g^{\mu\nu}_\sigma + \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \tag{89.36}$$

Подстановка (89.36) в (89.34) и интегрирование по частям дают для умноженного на $\sqrt{-g}$ консервативного тензора

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{89.37}$$

выражение

$$\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma} - \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{89.38}$$

Введем теперь систему величин w^σ_ρ, определяемых формулой

$$2\sqrt{-g}\,w^\sigma_\rho = g^{\mu\nu}_\rho \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma} - \delta^\sigma_\rho(L\sqrt{-g}). \tag{89.39}$$

Составляя сумму производных от (89.39) по x_σ и пользуясь (89.38), получим

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^\sigma_\rho)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho}G_{\mu\nu}. \tag{89.40}$$

Но для всякого симметричного тензора

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho}G_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}G^{\mu\nu}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu}. \tag{89.41}$$

Поэтому предыдущую формулу можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathfrak{w}^{\sigma}_{\rho})}{\partial x_\sigma}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu}; \tag{89.42}$$

С другой стороны, расходимость консервативного тензора (которая тождественно равна нулю) имеет вид

$$\nabla_\sigma G^{\sigma}_{\rho}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}G^{\sigma}_{\rho})}{\partial x_\sigma}-\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu}=0. \tag{89.43}$$

Второй член здесь совпадает с правой частью (89.42). Исключая его из (89.42) и (89.43), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}G^{\sigma}_{\rho}+\sqrt{-g}\mathfrak{w}^{\sigma}_{\rho})=0. \tag{89.44}$$

Выражая G^{σ}_{ρ} через T^{σ}_{ρ} из уравнений тяготения и полагая

$$-\frac{c^2}{8\pi\gamma}\mathfrak{w}^{\sigma}_{\rho}=t^{\sigma}_{\rho}, \tag{89.45}$$

мы можем написать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}T^{\sigma}_{\rho}+\sqrt{-g}t^{\sigma}_{\rho})=0. \tag{89.46}$$

Это уравнение представляет дифференциальную форму закона сохранения в том виде, в каком он чаще всего приводится в литературе. Величина

$$\overset{*}{U}{}^{\sigma}_{\rho}=\frac{\sqrt{-g}}{c}(T^{\sigma}_{\rho}+t^{\sigma}_{\rho}) \tag{89.47}$$

аналогична нашему $U^{\mu\nu}$, но не симметрична в своих значках. Поэтому из соотношения

$$\frac{\partial \overset{*}{U}{}^{\sigma}_{\rho}}{\partial x_\sigma}=0 \tag{89.48}$$

нельзя вывести формул, соответствующих законам сохранения момента количества движения и движения центра тяжести. Что касается законов сохранения энергии и количества движения, то обе формулировки их [основанная на (89.11) и основанная на (89.48)] дают эквивалентный результат. Докажем это, опуская все выкладки, которые достаточно сложны.

Из определения (89.39) величин $\mathfrak{w}^{\sigma}_{\rho}$ следует

$$2\mathfrak{w}^{\sigma}_{\rho}=-\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}-\delta^{\sigma}_{\rho}L+y_\alpha\frac{\partial g^{\sigma\alpha}}{\partial x_\rho}+(y^\sigma-\Gamma^\sigma)y_\rho. \tag{89.49}$$

Пользуясь формулами Добавления Б, получаем отсюда

$$2\sqrt{-g}\,(G_\rho^\sigma + w_\rho^\sigma) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta})\right] \tag{89.50}$$

и, после умножения на $-c$,

$$16\pi\gamma \overset{*}{U}{}_\rho^\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{c g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta})\right]. \tag{89.51}$$

Эта формула аналогична (89.10). Отсюда получаем

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0\,(dx)^3 = \frac{c}{16\pi\gamma}\int \frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\,n_j\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0\tau} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{j\tau})\,dS. \tag{89.52}$$

Так как интегрирование ведется по удаленной поверхности, то здесь можно вынести предельное значение $\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}$ из-под знака интеграла. Сравнивая получаемые выражения с (89.25) и (89.27), мы можем написать:

$$c\int \overset{*}{U}{}_\rho^0\,(dx)^3 = \left(\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \overset{*}{P}{}^\tau, \tag{89.53}$$

где $\overset{*}{P}{}^0 = \overset{*}{M}$ и $\overset{*}{P}{}^i$ имеют значение (89.27). Последнюю формулу мы можем также написать в виде

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0 (dx)^3 = \left(\frac{c g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \cdot \int U^{0\tau}\,(dx)^3. \tag{89.54}$$

Эти соотношения подтверждают, что несмотря на различие в дифференциальных формах законов сохранения, интегральные их формы друг другу эквивалентны. Кроме того, наличие величин $(g_{\rho\tau})_\infty$ в соотношениях (89.54) наглядно показывает, что полные энергия и количество движения системы представляют четырехмерный вектор в *галилеевом* пространстве-времени, в которое погружена система.

§ 90. Излучение гравитационных волн и его роль в балансе энергии

Законы сохранения энергии и других величин были написаны нами в § 89 в форме уравнений, выражающих баланс той или иной величины, т. е. тот факт, что изменение полного количества данной величины, заключенного внутри некоторого объема, происходит только за счет потока этой величины сквозь поверхность, ограничивающую этот объем.

Мы рассмотрим теперь вопрос о том, в какой мере можно пренебречь потоком сквозь поверхность и считать данную величину постоянной, другими словами, в какой мере можно говорить о зако-