Пользуясь формулами Добавления Б, получаем отсюда

$$2\sqrt{-g}\,(G_\rho^\sigma + w_\rho^\sigma) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta})\right] \tag{89.50}$$

и, после умножения на $-c$,

$$16\pi\gamma \overset{*}{U}{}_\rho^\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{cg_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta})\right]. \tag{89.51}$$

Эта формула аналогична (89.10). Отсюда получаем

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0 \,(dx)^3 = \frac{c}{16\pi\gamma}\int \frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\, n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0\tau} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{j\tau})\, dS. \tag{89.52}$$

Так как интегрирование ведется по удаленной поверхности, то здесь можно вынести предельное значение $\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}$ из-под знака интеграла. Сравнивая получаемые выражения с (89.25) и (89.27), мы можем написать:

$$c\int \overset{*}{U}{}_\rho^0 \,(dx)^3 = \left(\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \overset{*}{P}{}^\tau, \tag{89.53}$$

где $\overset{*}{P}{}^0 = \overset{*}{M}$ и $\overset{*}{P}{}^i$ имеют значение (89.27). Последнюю формулу мы можем также написать в виде

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0 (dx)^3 = \left(\frac{cg_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \cdot \int U^{0\tau}\,(dx)^3. \tag{89.54}$$

Эти соотношения подтверждают, что несмотря на различие в дифференциальных формах законов сохранения, интегральные их формы друг другу эквивалентны. Кроме того, наличие величин $(g_{\rho\tau})_\infty$ в соотношениях (89.54) наглядно показывает, что полные энергия и количество движения системы представляют четырехмерный вектор в *галилеевом* пространстве-времени, в которое погружена система.

§ 90. Излучение гравитационных волн и его роль в балансе энергии

Законы сохранения энергии и других величин были написаны нами в § 89 в форме уравнений, выражающих баланс той или иной величины, т. е. тот факт, что изменение полного количества данной величины, заключенного внутри некоторого объема, происходит только за счет потока этой величины сквозь поверхность, ограничивающую этот объем.

Мы рассмотрим теперь вопрос о том, в какой мере можно пренебречь потоком сквозь поверхность и считать данную величину постоянной, другими словами, в какой мере можно говорить о законах сохранения в узком смысле. При этом мы ограничимся законами сохранения энергии и количества движения.

Используя обозначения (89.18) и (89.19) для массы и количества движения и считая поверхность интегрирования сферической, мы можем, согласно (89.13)—(89.15), написать:

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -c^2 \int n_k U^{0k} r^2 \, d\omega, \tag{90.01}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -c^2 \int n_k U^{ik} r^2 \, d\omega, \tag{90.02}$$

где интегрирование ведется по телесному углу. Мы можем считать поверхность интегрирования настолько удаленной, что она вся проходит в волновой зоне. На основании результатов § 87 нетрудно заключить, что там величины $L^{\mu\nu}$, определяемые формулами (89.06) или (89.07), приводятся к $N^{\mu\nu}$. Беря для $N^{\mu\nu}$ значения (87.42), а для $T^{\mu\nu}$ — значения (87.45), соответствующие электромагнитному излучению, мы можем положить

$$U^{\mu\nu} = \sigma k^\mu k^\nu, \tag{90.03}$$

где σ есть плотность энергии (электромагнитной и гравитационной), введенная в § 87. Пользуясь формулой (87.53), выражающей зависимость плотности энергии σ от расстояния r, мы можем также написать

$$U^{\mu\nu} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{r^2} k^\mu k^\nu. \tag{90.04}$$

Беря значения k^ν из (87.21), будем иметь

$$U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^3 r^2} n_k; \qquad U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^2 r^2} n_i n_k \tag{90.05}$$

и, следовательно,

$$n_k U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^3 r^2}; \qquad n_k U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^2 r^2} n_i. \tag{90.06}$$

Подставляя эти значения в (90.01) и (90.02), получаем

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{1}{c} \int \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) \, d\omega, \tag{90.07}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -\int n_i \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) \, d\omega. \tag{90.08}$$

Но плотность σ_0 есть четная функция от n_i как для электромагнитного, так и для гравитационного поля. Поэтому формула (90.08) дает

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = 0. \tag{90.09}$$

Что касается формулы (90.07), то в ней интеграл не будет равен нулю, так как σ_0 есть величина положительная и не стремится к нулю с возрастанием r. Поэтому утечка массы всегда будет иметь место.

Рассмотрим сперва ту часть утечки массы, которая происходит вследствие излучения гравитационных волн. Мы должны тогда заменить σ_0 выражением σ_{0g} из (87.54), в которое должны подставить значения $f^{\alpha\beta}$ из (87.60) и (87.62). Положим для краткости

$$A_{ik} = \frac{d^3}{d\tau^3} D_{ik}(\tau). \tag{90.10}$$

Формула (87.54) дает тогда

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{A^2 - 2A_iA_i + A_{ik}A_{ik} - \frac{1}{2}(A - A_{jj})^2\right\}, \tag{90.11}$$

где введены сокращенные обозначения

$$A_i = A_{ik}n_k; \qquad A = A_in_i = A_{ik}n_in_k. \tag{90.12}$$

Можно показать, что величина σ_{0g} зависит не от шести величин A_{ik}, а только от пяти их комбинаций, иначе говоря от величин

$$B_{ik} = A_{ik} - a\delta_{ik}; \qquad a = \frac{1}{3}A_{jj}, \tag{90.13}$$

связанных соотношением

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0. \tag{90.14}$$

Величины B_{ik} представляют третьи производные от квадрупольных моментов

$$\overset{*}{D}_{ik}(t) = \int \rho\left(x_ix_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}r^2\right)(dx)^3 \tag{90.15}$$

при $t = \tau$. Выражая A_{ik} через B_{ik} и подставляя сперва в (90.12), а затем в (90.11), мы убедимся, что величина a из этой формулы выпадает, и мы получаем

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{B_{ik}B_{ik} - 2B_iB_i + \frac{1}{2}B^2\right\}. \tag{90.16}$$

Проверим, что эта величина всегда положительна. Так как она представляет инвариант по отношению к трехмерным вращениям, достаточно сделать проверку для какого-нибудь фиксированного направления вектора $\mathbf{n}$, входящего в B_i и B. Полагая

$$n_1 = 1; \qquad n_2 = 0; \qquad n_3 = 0 \tag{90.17}$$

и используя (90.14), мы получим из (90.16):

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6} \left\{ \frac{1}{2} (B_{22} - B_{33})^2 + 2B_{23}^2 \right\}, \tag{90.18}$$

что представляет положительную величину.

В формулу (90.07) входит интеграл от выражения (90.16) по телесному углу. Чтобы его вычислить, можно воспользоваться соотношениями

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k \, d\omega = \frac{1}{3} \delta_{ik}, \tag{90.19}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k n_l n_m \, d\omega = \frac{1}{15} (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}), \tag{90.20}$$

которые проще всего получаются, если в тождестве

$$\frac{1}{4\pi} \int (a_i n_i)^{2p} \, d\omega = \frac{1}{2p+1} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^p \tag{90.21}$$

положить сперва $p = 1$, затем $p = 2$ и найти коэффициенты при одинаковых степенях и произведениях величин a_i. Интегрирование в (90.21) легко выполняется в координатах с полярной осью, направленной вдоль вектора a.

Применяя соотношения (90.19) и (90.20), будем иметь

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(B_{ik}B_{ik} - 2B_iB_i + \frac{1}{2} B^2 \right) d\omega = \frac{2}{5} B_{ik}B_{ik}. \tag{90.22}$$

Внося (90.16) в (90.07) и пользуясь (90.22), получаем:

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{5c^7} B_{ik}B_{ik}. \tag{90.23}$$

Это выражение дает быстроту утечки массы в результате излучения гравитационных волн. Соответствующая формула для быстроты утечки энергии получается умножением (90.23) на c^2 и имеет вид

$$\frac{d\overset{*}{W}}{dt} = -\frac{\gamma}{5c^5} B_{ik}B_{ik}. \tag{90.24}$$

Эта утечка массы и энергии совершенно ничтожна, благодаря огромной величине константы

$$\frac{5c^3}{\gamma} = 2 \cdot 10^{39} \text{ г/сек}. \tag{90.25}$$

Если B характеризует порядок величины B_{ik}, то для системы Солнце — Юпитер можем положить в круглых числах

$$\frac{B}{c^2} = 10^{14} \text{ г/сек}, \tag{90.26}$$

поскольку масса, угловая скорость обращения Юпитера вокруг Солнца и отношение квадрата его орбитальной скорости к c^2 равны

$$m_{Ю} = 2 \cdot 10^{30} \text{ г}, \quad \omega_{Ю} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}; \quad \frac{v_{Ю}^2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-9}. \tag{90.27}$$

Деля квадрат числа (90.26) на значение константы (90.25), получаем для утечки массы $5 \cdot 10^{-12}$ *г/сек*, что в переводе на энергетические единицы составляет смехотворно малую мощность в 450 *вт*. Для сравнения укажем, что мощность электромагнитного излучения Солнца составляет около $4 \cdot 10^{12}$ *г/сек*, т. е. величину, примерно в 10^{24} раз бо́льшую.

Этот подсчет полностью подтверждает наше заключение, формулированное в конце § 88, а именно, что в задаче о гравитационном взаимодействии тяжелых масс гравитационные волны никакой роли не играют.

Рассмотрим еще вопрос о том, с какой точностью можно считать систему тяжелых масс консервативной.

При решении задачи механики в главе VI мы вывели уравнения движения с точностью, позволяющей найти поправки к энергии порядка $M\frac{q^4}{c^2}$, где q есть некоторая характерная скорость. Формула (90.24) показывает, что, пренебрегая электромагнитным излучением, мы могли бы идти и дальше, вплоть до членов порядка $M\frac{q^6}{c^4}$. С этой именно точностью задача многих тел может быть формулирована как задача механики, допускающая десять классических интегралов. Напомним, что в задаче о взаимодействующих зарядах (§§ 26—28) наибольшая достижимая точность соответствует порядку $M\frac{q^4}{c^2}$, так как там излучение играет гораздо бо́льшую роль.

§ 91. Связь между законами сохранения для поля и интегралами механики

В § 89 мы вывели формулы для производных по времени от величин $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{M}{}^{i0}$ и нашли представление этих величин в виде интегралов по поверхности. Найденные нами выражения для полной массы и для количества движения имеют вид

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\, dS, \tag{91.01}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\, dS. \tag{91.02}$$

Момент количества движения выражается формулой

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \Big\{x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - \\ - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}\Big\}\, dS. \tag{91.03}$$