В 1952 г. в качестве приложения к 15-му английскому изданию книги «О специальной и общей теории относительности» Эйнштейн вновь изложил свои взгляды на пространство и время, дополнив то, что им более кратко выражено в предыдущих статьях.

Во-первых, Эйнштейн поясняет, что характерной особенностью ньютоновой физики является то, что пространству и времени, так же как и материи, приписывается независимое реальное существование. Основа и неизбежность этой трактовки коренятся в понятии «ускорения», входящего как основной элемент в закон движения.

«Таким образом, ньютоново пространство должно мыслиться как и «покоящееся» или, по крайней мере, как «неускоренное», чтобы ускорение, появляющееся в законе движения, можно было рассматривать как величину, имеющую физический смысл. Почти то же самое справедливо и для времени, которое также входит в определение понятия ускорения». С этими представлениями о пространстве и времени связан весь путь развития от специальной к общей теории относительности.

5. ПАРАДОКС ЧАСОВ

В 1905 г. в первой и основной работе Эйнштейна по специальной теории относительности «К электродинамике движущихся тел» рассмотрен вопрос о физическом смысле полученных уравнений преобразований координат и времени. Полагаем, что часы, находясь в покое относительно «покоящейся» системы, показывают время t, а находясь в покое относительно системы, движущейся прямолинейно и равномерно, показывают время τ. Часы движущейся системы помещены в начале координат ее. Величины t, τ и $x=vt$ связаны соотношением

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$$

или

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{vvt}{c^2}\right)=\frac{t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$\tau=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=t-\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)t.$$

Показание часов, наблюдаемое из покоящейся системы, отстает в секунду на $1-\sqrt{1-v^2/c^2}$ *сек*, или, с точностью до величины четвертого и высших порядков, отстает на величину

$\frac{1}{2}$ v^2/c^2 *сек*. «Отсюда,— пишет Эйнштейн,— вытекает своеобразное следствие. Если в точках A и B системы K помещены покоящиеся синхронно идущие часы, наблюдаемые в покоящейся системе, и если часы из точки A двигать по линии, соединяющей ее с B, в сторону последней со скоростью v, то по прибытии этих часов в B они уже не будут более идти синхронно с часами в B» [26, стр. 19].

Часы, передвигавшиеся из одной точки пространства в другую точку, отстают по сравнению с теми часами, которые покоились в данной точке системы.

В нашем случае часы, передвигающиеся из A в B, отстают по сравнению с часами, находящимися с самого начала в точке B, на величину $\frac{1}{2}t\frac{v^2}{c^2}$, где t — время, в течение которого часы двигались из A в B. Этот же результат получается в том случае, когда часы движутся по любой ломаной линии. Допуская, что тот же результат верен и для движения часов по кривой, непрерывно меняющей свое направление, Эйнштейн приходит к выводу: «Если в точке A находятся двое синхронно идущих часов и мы перемещаем одни из них по замкнутой кривой с постоянной скоростью до тех пор, пока они не вернутся в A (на что потребуется, скажем, t *сек*), то эти часы по прибытии в A будут отставать по сравнению с часами, остававшимися неподвижными, на $\frac{1}{2}t\frac{v^2}{c^2}$ *сек* [26, стр. 19].

Еще в начале века Лармор и другие утверждали, что часы, движущиеся относительно эфира со скоростью v, должны идти медленнее, чем покоящиеся. Соотношение скоростей хода часов должно быть $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$. Главное внимание было обращено при этом на действие упругих сил и на структурные проблемы материи. Эйнштейн полностью отбрасывает вопрос о скрытых механизмах, определяющих изменения движущихся тел и часов. Он выдвигает идею относительности наблюдателей A и B. В данном случае точно так же, как наблюдатель A констатирует, что отстают часы B, наблюдатель B полагает, что часы A отстают от его собственных часов.

В 1906 г. Штарк доказал, что излучение движущихся положительных ионов каналовых лучей имеет линейчатый спектр; при этом было обнаружено смещение линий, вызываемое эффектом Допплера.

В 1907 г. Эйнштейн в работе «О возможности нового доказательства принципа относительности» показал, что принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света позволяет предугадать смещение линий спектра. Как уже известно, из этих принципов можно заключить, что равномерно движущиеся часы с точки зрения покоящейся системы отсчета идут медленнее, чем с точки зрения наблюдателя, который движется вместе с ними.

Излучение определенной частоты, испускаемое и поглощаемое атомами каналовых лучей, можно рассматривать как быстро движущиеся часы и применить в этом случае соотношение $\nu = \nu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, где ν — число оборотов стрелки часов в единицу времени для покоящегося наблюдателя;

ν_0 — число оборотов стрелки часов в единицу времени для движущегося вместе с ним наблюдателя. Соотношение $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ дает эффект второго порядка.

В том же 1907 г. в работе «О принципе относительности и его следствиях» Эйнштейн вновь вернулся к соотношению, связывающему между собой показания движущихся и покоящихся часов, но, как и в предыдущей работе того же года, основное внимание обратил на связь ν и ν_0.

В начале координат системы S' покоятся часы, стрелки которых совершают ν_0 оборотов за время одного оборота стрелок часов того же типа, которыми пользуются в системах S и S'.

«Стрелки рассматриваемых часов заканчивают оборот в промежутки времени $t'_n = n/\nu_0$, причем n принимает целые значения, и часы постоянно находятся в точке $x' = 0$. Отсюда с помощью двух первых формул преобразований для промежутков времени t_n, в течение которых стрелки часов заканчивают оборот в системе S, получаем $t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{\nu_0} n$. Следовательно, в системе S стрелки часов за единицу времени совершают $\nu = \frac{\nu_0}{\beta} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ оборотов» [26, стр. 74]. В 1910 г. Эйнштейн более подробно анализировал указанные соотношения. В 1911 г. в работе «Принцип относительности и его следствия в современной физике» Эйнштейн вновь возвращается к вопросу об измерении времени, полнее пояснив его. Измерение отрезка времени заключается в отсчете количества периодов, показываемых часами от начала до конца события. Это определение неполно. Оно теряет свой смысл, если часы находятся столь далеко от места события, что одновременное наблюдение события и часов невозможно. Часы должны быть синхронизированы таким образом, чтобы время, необходимое световому сигналу для прохождения некоторого пути, равнялось времени, необходимому для прохождения обратного пути. Определить время можно лишь при синхронизации часов. Рассматриваются часы H', находящиеся в начале координат системы S'. Часы H' идут в p_0 раз быстрее часов системы S и S', иначе говоря, при сравнении часов, находящихся в относительном покое, часы H' показывают p_0 единиц времени при отсчете другими часами одной единицы. Определяется, сколько единиц времени показывают часы H' за единицу времени в том случае, если наблюдение вести из системы S. В моменты $t'_1 = 1/p_0$, $t'_2 = 2/p_0$, $\ldots$, $t'_n = n/p_0$ часы H' отмечают концы периодов.

Для системы S время определяем по формуле

$$t = \beta\left(t' - \frac{V}{c^2}x'\right),$$

но $x' = 0$, следовательно, $t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{p_0}n$, $n/t_n = p_0/\beta$.

Часы H' показывают за единицу времени $p = \frac{p_0}{\beta} = p_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ периодов.

«Другими словами, если наблюдать часы из системы, по отношению к которой они равномерно движутся со скоростью v, то окажется, что они идут в $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз медленнее, чем те же часы, неподвижные по отношению к этой системе» [26, стр. 156].

В начале 1911 г. в своем докладе на заседании Общества естествоиспытателей в Цюрихе Эйнштейн вновь обращается к вопросу об измерении времени.

Установив метод синхронизации часов, мы не можем утверждать apriori, что два события, одновременные в системе S, одновременны в системе отсчета S', равномерно движущейся относительно системы S. Нельзя утверждать, что время независимо от состояния движения системы отсчета. Далее Эйнштейн рассматривает тот случай, когда часы, способные показывать время отсчета S и находящиеся относительно S в состоянии покоя, движутся теперь равномерно и прямолинейно относительно этой же системы отсчета. Оказывается, что эти часы будут идти медленнее с точки зрения системы S. Пусть часы приобретут большую скорость и с этой скоростью двигаются дальше. Пройдя большое расстояние, они получили импульс в противоположном направлении. Часы снова возвращаются в исходный пункт своего движения. В то время как в движущейся системе стрелки часов мало изменили свое положение, стрелки часов, оставшихся в покое, существенно изменили свое положение. В том же году этот вопрос рассмотрел Ланжевен [51].

Эйнштейн полагал, что следствия, относящиеся к парадоксу часов, должны быть отнесены к любой замкнутой физической системе. «Следует добавить, что выводы, которые справедливы для этих часов, взятых нами в качестве простой системы, представляющей все физические процессы, остаются в силе и для замкнутой физической системы с каким-либо другим устройством. Например, если бы мы поместили живой организм в некий футляр и заставили бы всю эту систему совершать такое же движение вперед и обратно, как описанные выше часы, то можно было бы достичь того, что этот организм после возвращения в исходный пункт из своего сколь угодно далекого путешествия изменился бы как угодно мало, в то время как подобные ему организмы, оставленные в пункте отправления в состоянии покоя, давно бы уже уступили место новым поколениям. Для движущегося организма длительное время путешествия будет лишь мгновением, если движение будет происходить со скоростью, близкой к скорости света! Это — неизбежное следствие наших исходных принципов, к которым нас приводит опыт» [26, стр. 185].

Далее Эйнштейн указывает, что можно считать исключенной проверку выводов теории посредством опыта с карманными часами, так как скорости, которые можно им сообщить, малы по сравнению со скоростью света. Объектами, обладающими свойствами часов и быстро движущимися, являются атомы, испускающие излучение с линейчатым спектром, которым в электрическом поле можно сообщить большие скорости (каналовые лучи). Следует ожидать, что частоты их колебаний будут меняться таким же образом, как ход движущихся часов. В 1917 г. Эйнштейн вновь повторил свои рассуждения о часах.

Работа 1918 года — «Диалог по поводу возражений против теории относительности» [26, стр. 616] — посвящена парадоксу часов.

Рассуждения «критика» и «релятивиста», т. е. противника и сторонника физической теории относительности, отличаются прозрачностью и логической стройностью.

«Критик» отмечает, что с момента создания специальной теории относительности вывод о замедляющем влиянии движения на ход часов вызывал возражения и казался противоречащим основам теории. Двое совершенно одинаковых часов U^1 и U^2 не испытывают никаких влияний извне и покоятся в системе K. K — галилеева система координат, что означает наличие тела, по отношению к которому изолированные материальные точки движутся прямолинейно и равномерно.

При движении одних часов, например U^2, прямолинейно и равномерно по отношению к системе K (с точки зрения этой системы), они идут медленнее, чем часы U^1, неподвижные относительно K. Само по себе это явление кажется странным «критику». «Далее «критик» прибегает к мысленному эксперименту. A и B — удаленные друг от друга точки системы K. A — начало координат системы K, B — точка на положительной оси x. Часы U^1 и U^2 покоились в точке A. Часам U^2 сообщают постоянную скорость в положительном направлении оси x, в направлении точки B. При достижении точки B скорость часов меняется на обратную. Достигнув точки A, часы тормозятся. По отношению к K они опять будут покоиться.

«Так как наблюдаемое из K изменение положения стрелок часов U^2, которое возможно при перемене направления скорости U^2, не может превзойти некоторой величины и так как часы U^2 во время равномерного движения вдоль отрезка AB идут медленнее, чем U^1 (если наблюдать из системы K), то при достаточной длине отрезка AB часы U^2 должны после своего возвращения отставать от часов U^1» [26, стр. 617—618].

Рассуждения, приведенные «критиком», безусловно, верны. Далее «критик» указывает, что в согласии с принципом относительности процесс должен протекать одинаково, если представить его в системе K', движущейся вместе с часами U^2.

По отношению к штрихованной системе часы U^2 остаются в покое, а взад и вперед движутся часы U' и по окончании движения должны отставать часы U^1. Парадокс состоит в том, что из двух покоящихся и расположенных друг возле друга часов каждые отстают друг от друга.

«Релятивист» указывает, что согласно специальной теории относительности системы координат K и K' не являются равноправными. Равноценны только все галилеевы (неускоренные) системы координат.

Однако и с точки зрения общей теории относительности системы нештрихованная и штрихованная неравноценны.

Эйнштейн показывает, как выглядит процесс в K и K'.

Первый этап. В системе K движение часов трактуют так, что часы U^2 ускоряются внешними силами в направлении оси x, до приобретения ими скорости v. Часы U^1 покоятся.

В системе K' — в отрицательном направлении оси x — возникает гравитационное поле. Часы U^1 падают ускоренно, пока не приобретут скорость v. Внешние силы, удерживающие часы U^2, не дают им прийти в движение. По достижении часами U^1 скорости v гравитационное поле исчезает.

Второй этап. Наблюдатель системы K трактует, что часы U^2 с постоянной скоростью движутся до точки B, часы же U^1 покоятся.

Наблюдатель системы K' полагает, что часы движутся с постоянной скоростью v до точки B' на отрицательной оси x, а часы U^2 покоятся.

Третий этап. Наблюдатель в K полагает, что часы U^2 ускоряются внешними силами, действующими в отрицательном направлении оси x, ускоряются до тех пор, пока не достигнут скорости v в отрицательном направлении оси x.

Наблюдатель в K' полагает, что в положительном направлении оси x появляется однородное поле тяжести. Под действием поля часы U^1 ускоряются в положительном направлении, пока не достигнут скорости v. После этого поле тяжести исчезнет. Часы U^2 удерживаются при этом внешними силами, действующими в отрицательном направлении оси x, предотвращающими движение часов U^2 в появившемся поле тяжести.

Четвертый этап. Для наблюдателя в системе K часы U^2 с постоянной скоростью v движутся назад в отрицательном направлении оси x и приближаются к часам U^1. Часы U^1 остаются при этом в покое. Наблюдатель в K^1 полагает, что часы U^1 с постоянной скоростью v движутся в положительном направлении оси x, пока не приблизятся к часам U^2. U^2 находятся в покое.

Пятый этап. С точки зрения наблюдателя системы K часы U^2 останавливаются внешними силами, в то время как с точки зрения наблюдателя системы K' часы U^2 удерживаются внешними силами в состоянии покоя, а часы U^1 останавливают возникшее поле тяжести, направленное по отрицательной оси x, после чего оно снова исчезает.

Эйнштейн показал, что отставание часов U^2 по-разному трактуется наблюдателями систем K и K'.

Если относить все к координатной системе K', то это явление объясняется следующим образом: в течение второго и четвертого этапов рассматриваемого процесса часы U^1, движущиеся со скоростью v, идут медленнее покоящихся часов U^2. Но это отставание будет с избытком компенсировано быстрым ходом часов U^1 во время третьего этапа процесса. В самом деле, согласно общей теории относительности часы идут тем быстрее, чем больше гравитационный потенциал в том месте, где они находятся, часы же U^1 на третьем этапе процесса действительно находятся в области бóльшего гравитационного потенциала, чем часы U^2.

После статьи Эйнштейна 1918 г. «Диалог по поводу возражений против теории относительности» парадокс часов не привлекал к себе внимание в какой-либо широкой мере. Наиболее существенными были статьи Ж. Беккереля [52], А. Бергсона [53, 54], А. Метца [55]. Большинство статей того времени по вопросу о парадоксе часов носили философский характер.

Бергсон не оспаривает математическое и физическое содержание преобразований Лоренца, но инвариантность он относит не к пространственно-временному интервалу, а к инвариантности «времени», взятому вне связи с пространством. Отсюда требование «симметричности». В дальнейшем интерес к этим проблемам стал оживать с 40-х годов [56, 57].

В 1956 г. Дингль и Мак-Крей полемизировали между собой в связи с расчетом, приведенным Г. Томсоном [58]. Согласно этому расчету полет к ближайшей звезде и обратно продлится более 17 лет по земным часам и 14,5 лет по часам космического корабля. Дингль полагал, что этот расчет неверен, так как наблюдатель на Земле и корабль должны одинаково рассматриваться как движущиеся [59]. Мак-Крей возражал Динглу, полагая, что мировая линия земного наблюдателя есть отрезок геодезической, а мировая линия корабля не является геодезической.

Билдер показал, что при возвращении корабля на Землю, независимо от системы отсчета, наблюдатели будут отмечать отставание часов космического корабля [60].

В 1957 г. Дингль продолжал отстаивать свою точку зрения по вопросу о парадоксе часов, полагая, что из принципа симметрии и принципа относительности следует, что часы после их совмещения должны показывать одинаковое время [61]. Билдер, возражая Динглю, указывал, что речь идет отнюдь не о симметричной ситуации. Одни часы движутся ускоренно относительно Вселенной, нарушив тем самым симметрию, постулируемую Динглем [62].

В том же году Фрай и Бригем, применяя соотношения специальной и общей теории относительности к различным участкам полета тел, показали, что замедление времени для движущейся системы координат не зависит от того, считать ли ее движущейся или рассматривать ее как неподвижную, а всю остальную Вселенную считать движущейся [63]. Мак-Миллан разрешает парадокс часов, используя сначала только инерциальные системы отсчета, а затем учитывая также ускорения в рамках специальной теории относительности [64]. Крофорд указал, что результаты совокупности экспериментов по измерению времени жизни π-мезонов на лету и в покое подтвердили выводы теории относительности [65]. Крофорд ссылается на работы Росси и сотрудников [66], Блэкета [67], Разетти [68] и др.

Зингер полемизировал с Динглем. Он полагал, что при вращении искусственного спутника вокруг Земли на небольшой высоте время на спутнике будет идти медленнее [69].

Кокран предложил эксперимент с π-мезонами. Если пучок π-мезонов возвратить к месту первоначального наблюдения, то из-за замедления времени число нераспавшихся мезонов будет больше, чем в случае с покоившимися мезонами [70]. В другой статье Кокран доказывает, что факт увеличения времени жизни мезона τ при движении по прямой должен привести к увеличению τ при возврате в точку первоначального наблюдения [71].

Ромер [72] рассмотрел следующую схему. В инерциальной системе покоятся разделенные большим пространственным интервалом часы A и C. Эти часы синхронизованы с помощью световых сигналов. Часы B пролетают мимо A со скоростью v, достигают часов C, поворачивают и летят со скоростью $-v$ к часам A. Если при первом совпадении $t_A = t$, то при движении от C к B $\Delta t = t_C - t_B - t_A - t_B > 0$.

Такая же разность времен возникает на пути от C к A. Подобный анализ с точки зрения B требует введения часов $Д$, покоящихся и синхронизированных сначала относительно B и совпадающих с точки зрения B с A, когда B встречаются с C. После поворота часов B они движутся относительно $Д$. Синхронизация B и $Д$ исчезает. Наблюдатель, связанный с часами B, не может сделать вывод, что A движутся медленнее.

Наглядно и доходчиво вопрос о парадоксе часов изложен Д. В. Скобельцыным. Схема обычная. Один из двух наблюдателей A на протяжении движения наблюдателя B покоится в одной и той же инерциальной системе. Наблюдателю B в начальный момент времени сообщено ускорение. В результате наблюдатель B на протяжении времени T_0, измеренного в инерциальной системе наблюдателя A, удаляется от A на расстояние x_0, двигаясь с постоянной скоростью. Затем B получает мгновенное ускорение в направлении A. Двигаясь в обратном направлении с той же скоростью в течение того же времени T_0, наблюдатель B возвращается в исходное положение. Показание часов A равно $2T_0$, показание часов B равно

$$2T_0\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Этот же результат может быть получен, если полагать, что B покоится, а с точки зрения B движется A. В кажущемся противоречии с версией первой ход часов A замедлен относительно B. «Однако в представлении наблюдателя B в середине цикла, в момент времени $t'=T_0$ (по часам B), происходит скачкообразный сдвиг показаний часов A. В момент времени $t'=T_0'$ они в результате этого сдвига мгновенно уходят вперед на $\frac{2v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c}}$ своих делений. Согласно версии № 1, такие скачки в показании движущихся часов B не имеют места. Конечный результат сравнения показаний часов A и B не зависит, разумеется, от способа рассмотрения и в обоих случаях определяется уже полученным в гл. I сосотношением $2T_0'=2T_0\sqrt{1-v^2/c^2}$» [73].

Во второй версии в момент $t'=T_0'$ мы изменяем систему отсчета, в которой «неподвижен» B в то время, когда в первой версии инерциальная система, в которой пребывает A, остается неизменной.

Лефферт и Донахью по методу Меллера рассматривали движение часов, покоящихся в инерциальной системе, с точки зрения наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе. Показано, что в моменты включения и выключения ускорения скорость часов меняется скачкообразно от $-v$ до $-v\sqrt{1-v^2/c^2}$

Этот скачок вызван изменением гравитационного поля во времени [74].

Кемпбелл рассматривает обычную схему. Часы A покоятся в инерциальной системе координат. Часы B в момент отлета синхронизируются с часами A. Они летят с постоянной скоростью. Под действием внешних сил они за время τ (очень малое) быстро меняют знак скорости и возвращаются в A. С точки зрения часов B именно за этот малый промежуток времени τ часы A покажут больший интервал времени. Именно поэтому при их встрече часы A показывают больше времени, чем часы B [75].

Шильд рассмотрел вопрос о парадоксе часов, когда с точки зрения каждой из координатных систем при учете релятивистского эффекта Допплера рассматривается прием сигналов, испускаемых другой системой через равные промежутки времени [76].

Количественный расчет парадокса часов дан Меллером. В начале координат инерциальной системы отсчета покоятся стандартные часы C_1 и C_2. При $t=0$ часы C_2 постоянной силой F ускоряются в направлении положительных x. Достигнув точки A, часы C_2 приобрели скорость v и с этой равномерной скоростью движутся к точке B. В точке B часы C_2 подвергаются торможению. Величина торможения равна силе ускорения F, но имеет противоположное направление. В точке C часы C_2 в результате торможения останавливаются и ускоряются назад к точке B, достигнув которой они обладают скоростью $-v$.

Между точками B и A часы движутся равномерно со скоростью $-v$. В точке A подвергаются действию силы F. Сила F останавливает часы в точке O_1.

Время прохождения пути O_1A равно $\Delta' T$, время прохождения AB равно $\Delta'' T$, время прохождения пути BC равно $\Delta''' T$.

В силу симметрии время прохождения от O_1 до C равно времени прохождения от C до O_1 и $\Delta''' T=\Delta' T$. Легко усмотреть, что

$$\Delta\tau_1 = \Delta T = 2(\Delta' T + \Delta'' T + \Delta''' T) = 2(2\Delta' T + \Delta'' T), \qquad (1)$$

где τ_1 — собственное время часов C_1; τ_2 — собственное время часов C_2; $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$ — время, отмеченное часами C_1 и C_2 между двумя встречами часов; ΔT — время между встречами в инерциальной системе отсчета S_1;

$$\Delta\tau_2 = 2(\tau_2' + \tau_2'' + \tau_2''') = 2(2\tau_2' + \tau_1''), \qquad (2)$$

где τ_2' — прирост собственного времени часов C_2 при прохождении O_1A; τ_2'' — при прохождении AB; τ_2''' — при прохождении BC.

При движении часов C_2 от O_1 до A движение описывается уравнением

$$X = \frac{c^2}{g}\left\{\left[1 + \left(\frac{gT}{c}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\}. \qquad (3)$$

Скорость

$$u = \frac{dX}{dT} = \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gT}{c}\right)^2}}, \qquad g = \frac{F}{m_0}, \qquad (4,5)$$

следовательно,

$$v = \frac{g\Delta' T}{\sqrt{1 + \left(\frac{g\Delta' T}{c}\right)^2}}, \qquad g\Delta' T = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (6)$$

Зная $d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, dt$ и u, находим

$$\tau_2' = \int_0^{\Delta' T} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, dT = \int_0^{\Delta' T} \frac{dT}{\sqrt{1 + \left(\frac{gT}{c}\right)^2}} = \frac{c}{g} \sinh^{-1} \frac{g\Delta' T}{c}. \qquad (7)$$

Но

$$\frac{g\Delta' T}{c} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sinh \frac{g\tau_2'}{c} = \sinh \frac{g\tau_2'''}{c}, \qquad (8)$$

$$\tanh \frac{g\tau_2'}{c} = \frac{\sinh g\tau_2'/c}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{g\tau_2'}{c}}} = \frac{v}{c}, \qquad (8')$$

$$\tau_2' = \Delta'' T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (9)$$

Пусть F непрерывно растет, v — постоянно, $g \to \infty$. При этом из (8) следует, что

$$\Delta' T = \Delta''' T \text{ и } \tau_2' = \tau_2''' \text{ стремятся к нулю.}$$

Из формул (1), (2), (9) следует

$$\Delta\tau_1 = 2\Delta'' T, \qquad \Delta\tau_2, = 2\tau_2'' = 2\Delta'' T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad (10)$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (11)$$

Таким образом, найдено, что движущиеся часы C_2 отстают от неподвижных часов C_1.

Далее Меллер рассматривает весь процесс в системе отсчета S_2. Система S_2, координаты которой x, y, z, t, связана с часами C_2, все время находящимися в начале координат. Пока система S_2 ускорена относительно S_1, в S_2 имеется гравитационное поле.

В интервале $0 < t < \tau_2'$ длительностью $\Delta' t = \tau_2'$ гравитационное поле описывается скалярным потенциалом

$$\chi = -\frac{c^2}{2}(g_{44} + 1) = gx\left(1 + \frac{gx}{2c^2}\right).$$

В интервале

$$\tau_2' < t < \tau_2' + \tau_2''$$

длительностью $\Delta'' t = \tau_2''$

$$\chi = 0.$$

В интервале

$$\tau_2' + \tau_2'' < t < \tau_2' + \tau_2'' + \tau_2'''$$

длительностью $\Delta''' t = \tau_2''' = \tau_2' = \Delta' t$

$$\chi = -gx\left(1 - \frac{gx}{2c^2}\right).$$

Мы имеем три периода. В течение периода $\Delta' t$ часы C_1 свободно падают в направлении отрицательной оси x согласно уравнению

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right)\frac{1}{\cosh\frac{gt}{c}} - 1\right].$$

В течение периода $\Delta'' t$ они движутся равномерно со скоростью v.

В течение периода $\Delta''' t$ они останавливаются в точке $x_0 = -l$. «Так как в этот момент системы S_1 и S_2 неподвижны относительно друг друга, то максимальное расстояние между часами одинаково в обеих системах. После этого часы C_1 реверсивным движением возвращаются к началу координат. Часы C_2 в течение всего процесса пребывают неподвижно в начале координат, ибо гравитационное поле уравновешивается внешней силой F».

Учитывая формулу $d\tau = dt\left(1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$ и выражения для χ. вычисляют возрастание собственного времени часов C_1:

$$\Delta\tau_1 = 2\,(\tau_1' + \tau_1'' + \tau_1'''),$$

где τ_1', τ_1'', τ_1''' — собственные времена часов C_1 в периоды $\Delta' t$, $\Delta'' t$, $\Delta''' t$. C_2 неподвижно в начале координат $x = 0$ (χ все время равно нулю). Таким же образом получают

$$\Delta\tau_2 = 2\,(\Delta' t + \Delta'' t + \Delta''' t) = 2\,(2\Delta' t + \Delta'' t) = 2\,(2\tau_2' + \tau_2'').$$

Согласно формуле для

$$\tau = \left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right)\int_0^t \frac{dt}{\cos h^2 \frac{gt}{c}} = \left(\frac{c}{g} + \frac{x_0}{c}\right)\tanh\frac{gt}{c},$$

поскольку скорость часов C_1 в начале была равна нулю, можно получить τ_1' при $x_0 = 0$ и $t = \Delta' t = \tau_2'$:

$$\tau_1' = \frac{c}{g}\tanh\frac{g\tau_2'}{c} = \frac{v}{g},$$

что находится в согласии с τ_1'':

$$\tau_1'' = \Delta'' t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau_2''\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta'' T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Часы C_1 в течение $\Delta''t$ движутся с равномерной скоростью в отсутствии гравитационного поля.

Полагая $g = -g$, $x_0 = -l$, $t = \Delta'''t = \tau_2''' = \tau_2'$, получим

$$\tau_1''' = \left(\frac{c}{g} + \frac{l}{c}\right)\tanh\frac{g\tau_2'}{c} = \left(\frac{c}{g} + \frac{l}{c}\right)\frac{v}{c}.$$

Рассмотрен предельный случай $g \to \infty$ при постоянном v. Меллер анализирует также значение гравитационного потенциала для хода движущихся часов. Рассматриваются часы, совершающие под действием центральной силы равномерно круговое движение в инерциальной системе отсчета. Это же явление рассматривается с точки зрения наблюдателя, находящегося на вращающемся диске.

6. ПЕРИГЕЛИЙ МЕРКУРИЯ

Меркурий — ближайшая к Солнцу планета. Среднее расстояние Меркурия от Солнца составляет 0,37 земного, диаметр Меркурия равен $^1/_3$ земного. Под действием притяжения тел солнечной системы направление большой оси эллиптической орбиты, проходящей через перигелий, афелий и оба фокуса (линия апсид), в пространстве меняется. Одновременно меняется угол между направлением к точке весеннего равноденствия и к перигелию, так называемая *долгота* перигелия.

Согласно закону сохранения момента количества движения планета должна двигаться в одной и той же плоскости, с законом же тяготения связано то, что планета движется в данной плоскости по замкнутой кривой. Однако под влиянием возмущений орбита изменяется, планета не возвращается к определенному месту по истечении известного периода.

Точка эллиптической орбиты, ближайшая к Солнцу (перигелий), перемещается. Многочисленные исследования Леверрье позволили установить не совсем полное совпадение между теоретически вычисленными и наблюдаемыми положениями планеты. Согласно теории долгота перигелия Меркурия должна была возрастать на 527″ за 100 лет, но с большой точностью выполненные наблюдения прохождения Меркурия через диск Солнца дали 565″, на 38″ больше вычисленных.

Тот факт, что решение уравнений движения планеты, дает вековое возмущение меньше, чем величина, выведенная из наблюдений, привлекал к себе усиленное внимание астрономов.

1) К. Рудницкий рассмотрел в исторической последовательности гипотезы, к которым прибегали для объяснения наблюдаемого ускорения движения перигелия Меркурия на 42″,56 в столетие. Леверрье предположил, что масса Венеры на $^1/_{10}$ превышает принятую в астрономии. Возмущение, обусловленное влия-