Часы C_1 в течение $\Delta''t$ движутся с равномерной скоростью в отсутствии гравитационного поля.

Полагая $g = -g$, $x_0 = -l$, $t = \Delta'''t = \tau_2''' = \tau_2'$, получим

$$\tau_1''' = \left(\frac{c}{g} + \frac{l}{c}\right)\tanh\frac{g\tau_2'}{c} = \left(\frac{c}{g} + \frac{l}{c}\right)\frac{v}{c}.$$

Рассмотрен предельный случай $g \to \infty$ при постоянном v. Меллер анализирует также значение гравитационного потенциала для хода движущихся часов. Рассматриваются часы, совершающие под действием центральной силы равномерно круговое движение в инерциальной системе отсчета. Это же явление рассматривается с точки зрения наблюдателя, находящегося на вращающемся диске.

6. ПЕРИГЕЛИЙ МЕРКУРИЯ

Меркурий — ближайшая к Солнцу планета. Среднее расстояние Меркурия от Солнца составляет 0,37 земного, диаметр Меркурия равен $^1/_3$ земного. Под действием притяжения тел солнечной системы направление большой оси эллиптической орбиты, проходящей через перигелий, афелий и оба фокуса (линия апсид), в пространстве меняется. Одновременно меняется угол между направлением к точке весеннего равноденствия и к перигелию, так называемая *долгота* перигелия.

Согласно закону сохранения момента количества движения планета должна двигаться в одной и той же плоскости, с законом же тяготения связано то, что планета движется в данной плоскости по замкнутой кривой. Однако под влиянием возмущений орбита изменяется, планета не возвращается к определенному месту по истечении известного периода.

Точка эллиптической орбиты, ближайшая к Солнцу (перигелий), перемещается. Многочисленные исследования Леверрье позволили установить не совсем полное совпадение между теоретически вычисленными и наблюдаемыми положениями планеты. Согласно теории долгота перигелия Меркурия должна была возрастать на 527″ за 100 лет, но с большой точностью выполненные наблюдения прохождения Меркурия через диск Солнца дали 565″, на 38″ больше вычисленных.

Тот факт, что решение уравнений движения планеты, дает вековое возмущение меньше, чем величина, выведенная из наблюдений, привлекал к себе усиленное внимание астрономов.

1) К. Рудницкий рассмотрел в исторической последовательности гипотезы, к которым прибегали для объяснения наблюдаемого ускорения движения перигелия Меркурия на 42″,56 в столетие. Леверрье предположил, что масса Венеры на $^1/_{10}$ превышает принятую в астрономии. Возмущение, обусловленное влия-

нием Венеры, составляет 278″. Любая неопределенность в массе Венеры вызывает соответствующую неопределенность в соответствующем возмущении. Уже давно, однако, известно о надежности численного значения массы Венеры, и предположение Леверрье потеряло свое значение. 2) Были высказаны гипотезы о роли возмущений: а) возмущения со стороны гипотетической интрамеркуриальной планеты; б) возмущения со стороны неизвестного спутника Меркурия; в) возмущения со стороны малых тел, обращающихся внутри орбиты Меркурия. Эти гипотезы оказались несостоятельными в своих исходных положениях. 3) Зеелигер стремился объяснить добавочное время обращения Меркурия воздействием вещества зодиакального света, но количественно это не могло быть проверено. 4) Была высказана гипотеза о воздействии несферической формы Солнца. При весьма малой сплюснутости Солнца его гравитационное поле изменилось бы, а это оказало бы влияние на движение планет. Ближайшие к Солнцу планеты движутся по орбитам, почти лежащим в экваториальной плоскости, и на орбитальном движении планет сплюснутость должна отразиться лишь на вращении перигелия. Однако разность между экваториальным и полярным радиусами Солнца 0,09″ дала бы лишь 18% значения добавочного вращения перигелия Меркурия. 5) Отклонения пытались объяснить и небольшим отличием на $15 \cdot 10^{-8}$ показателя степени в законе тяготения.

Еще около 1850 г. Леверрье приступил к созданию новых таблиц движения больших масс. Леверрье вычислил вековое возмущение долготы перигелия Меркурия от всех больших планет. Им были получены, исходя из системы масс по Леверрье, значения для планет:

Венера +280″,64; Земля 83″,61; Марс 2″,85; Юпитер 152″,59; Сатурн 7″,24; Уран 0″,14; Нептун 0″,06. Итого +527″, 13.

«Леверрье изучил десять ноябрьских прохождений Меркурия, происшедших с 1677 г. по 1848 г., и шесть майских за период с 1661 по 1845 г. В то время как ноябрьские прохождения дают достаточно хорошее согласие теории с наблюдениями, майские прохождения показывают ошибки в 12″,05 в 1753 г., которые, уменьшаясь довольно правильно, с течением времени достигают 1″,03 в 1845 г.» [77, стр. 85].

Эти данные весьма любопытны. Опираясь на них, Леверрье предположил, что по крайней мере должны быть ошибочными два элемента орбиты. Ошибки складываются для майских наблюдений прохождений Меркурия по диску Солнца и компенсируются для ноябрьских прохождений.

Леверрье изучил еще около 400 меридианных наблюдений Меркурия, сделанных на Парижской обсерватории (1801—1828, 1836—1842), стремясь определить, какие поправки могут они внести в вековые изменения орбиты Меркурия.

Леверрье связывал эти наблюдения с формулой, выведенной им в 1859 г.:

$$\Delta\pi + 2{,}72\,\Delta e = 38'',3,$$

где $\Delta\pi$ и Δe — поправки к принятым в таблицах вековым изменениям долготы перигелия и эксцентриситета орбиты Меркурия.

«Оказалось (1859 г.), что точное значение Δe не может быть получено, но во всяком случае эта поправка имеет отрицательное значение, равное приблизительно — $8'',1$. Тогда из уравнения $\Delta\pi + 2{,}72\Delta\ e = 38'',3$ следует, что $\Delta\pi = +60''$. Из одних меридианных наблюдений для $\Delta\pi = +131''$.

Однако при построении таблиц движения Меркурия Леверрье произвольно положил $\Delta e = 0$, что дает $\Delta\pi = +38'',3$» [77, стр. 85—86].

Приведенные отрывки наглядно характеризуют, насколько сложна была картина в первых трех четвертях XIX в.

Ньюком, располагая тремя новыми ноябрьскими прохождениями 1861, 1868 и 1884 гг. и одним майским наблюдением 1878 г., последовательно уточнял значение $\Delta\pi$ ($\Delta\pi = +42'',23$).

Леверрье и Ньюком вычисляли вековые возмущения, основываясь на идее Лагранжа; Дулитл вычислил вековые возмущения четырех внутренних планет по методу Гаусса, в модификации, принадлежащей Хиллу.

Дулитл перевычислил значения Леверрье и Ньюкома для принятой им системы масс больших планет. Он нашел следующие значения: Леверрье $529'',84$; Ньюком $533'',03$; Дулитл $529'',67$.

Шази нашел, что различие в значениях Ньюкома и Дулитла объясняются тем, что Ньюком пользуется иным определением долготы перигелия. Смарт при несколько видоизмененных обозначениях по сравнению с Эддингтоном дает решение дифференциального уравнения орбиты планеты, полученного из теории относительности:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} + \alpha u^2, \tag{1}$$

где $u = 1/r$; r и θ — полярные координаты планеты;

$$\alpha = 3\mu/c^2; \tag{2}$$

$\mu = C\,(m_0 + m)$; m_0 — масса Солнца, m— масса планеты; c—скорость света.

В первом приближении, полагая $\alpha = 0$, решение имеет вид

$$u = \frac{1}{p}\,[1 + e\cos(\theta - \widetilde{\omega})], \tag{3}$$

где e и $\widetilde{\omega}$ — постоянные; $p = h^2/\mu$.

Подставим выражение для u в член αu^2:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2\alpha e}{p^2}\cos(\theta - \tilde{\omega}) + \frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta - \tilde{\omega}), \qquad (4)$$

где $\alpha_1 = \frac{\alpha}{p}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha e^2}{p}$. Если через $u + \Delta u$ обозначить решение уравнения (4), где u определено формулой (3), то получим

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\Delta u) + \Delta u = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{2\alpha e}{p^2}\cos(\theta - \tilde{\omega}) + \frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta - \tilde{\omega}).$$

Частное решение последнего уравнения имеет вид

$$\Delta u = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha e}{p^2}\theta\sin(\theta - \tilde{\omega}) - \frac{1}{3}\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta - \tilde{\omega}).$$

Решение уравнения (1) с точностью до величины порядка α будет

$$u = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\theta - \tilde{\omega})] + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha e}{p^2}\theta\sin(\theta - \tilde{\omega}) - {}^1/_3\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta - \tilde{\omega}). \qquad (5)$$

Пусть для эпохи, соответствующей $\theta = \theta_0$, уравнение оскулирующего эллипса будет

$$u_0 = \frac{1}{p_0}[1 - e_0\cos(\theta - \tilde{\omega}_0)], \qquad (6)$$

$$u_0(\theta_0) = u(\theta_0) \qquad (7)$$

и

$$\frac{du_0}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \text{ при } \theta = \theta_0. \qquad (8)$$

Поскольку p_0 отличается от p на величину порядка α, то $p_0/p = 1 + k\alpha$. Подставив в равенство (7) выражения для u_0 (6) и u как решение с точностью до величины порядка α, т. е. (5), получим

$$e_0\cos(\theta_0 - \tilde{\omega}_0) = k_1\alpha + e(1 + k\alpha)\cos(\theta_0 - \tilde{\omega}) + \\ + \frac{\alpha e}{p}\theta_0\sin(\theta_0 - \tilde{\omega}) - \frac{1}{3}\alpha_2\cos 2(\theta_0 - \tilde{\omega}). \qquad (9)$$

Аналогично, подставив в уравнение (8) выражения (6) и (5), получим

$$e_0\sin(\theta_0 - \tilde{\omega}_0) = e(1 + k_2\alpha)\sin(\theta_0 - \tilde{\omega}) - \frac{\alpha e}{p}\theta_0\cos(\theta_0 - \tilde{\omega}) - \\ - \frac{2}{3}\alpha_2\sin 2(\theta_0 - \tilde{\omega}), \; k_2 = \text{const}. \qquad (10)$$

Умножим равенство (9) на $\sin(\theta_0 - \tilde{\omega})$, а равенство (10) — на $\cos(\theta_0 - \tilde{\omega})$ и вычтем: В результате получим

$$e_0 \sin(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}) = \frac{\alpha e}{d} \theta_0 + \alpha \Sigma' C_i \sin(\theta_0 - \tilde{\omega}), \tag{11}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots$; C_i — постоянные.

Умножим равенство (9) на $\cos(\theta_0 - \tilde{\omega})$, а равенство (10) — на $\sin(\theta_0 - \tilde{\omega})$ и сложим. Получим

$$e_0 \cos(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}) = e + k\alpha + \alpha \Sigma D_i \cos i(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}),\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Положим $\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega} = \Delta_0\tilde{\omega}$, $e_0 - e = \Delta_0 e$.

«Из формул (11) и (12) легко видеть, что $\Delta_0\tilde{\omega}$ и $\Delta_0 e$ имеют порядок α и что Δe является чисто периодической величиной. С точностью до малых величин первого порядка относительно α (включительно) формулу (11) можно записать в виде

$$\Delta_0\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{p} \theta_0 + \ldots \tag{13}$$

Если e_1 и $\tilde{\omega}_1$ — оскулирующие элементы в последующую эпоху θ_1, то

$$\Delta_1\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{p} \theta_1 + \ldots\text{»}\ [78]. \tag{14}$$

Если положить $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$, то $\tilde{\omega}_0$ увеличится на $2\pi\alpha/p$:

$$\lambda = \frac{2\pi\alpha}{p} \frac{100}{T} \operatorname{cosec} 1'',$$

где λ — коэффициент при вековом члене, происходящем от рассматриваемого эффекта, выраженный в секундах дуги за столетие. T — период обращения, выраженный в годах. Обратимся к $\alpha = 3\mu/c^2$. Положим μ равным:

$$\mu = n^2 a^3 = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3,\ p \equiv \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2).$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2400\pi^3 a^2 \operatorname{cosec} 1''}{c^2 T^3 (1 - e^2)} = \frac{9,46 \cdot 10^6}{150} \textit{ а. е./год}.$$

Сравнивают с наблюдениями не λ, а $e\lambda$.

В 1950 г., в материалах десятого астронавтического конгресса в Лондоне, приведен расчет релятивистского смещения перигея для искусственных спутников Земли [79]. Использована метрика, отличная от шварцшильдовской:

$$ds^2 = (1-2A)\,dr^2 - (1+2B)\,r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Phi^2) + 4C\,dr\,dt + \\ + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2.$$

Коэффициенты A, B, C определены с учетом зон разной плотности Земли:

$$A = \left(\frac{M}{r}\right)\left[1-0{,}364\left(\frac{R}{r}\right)^2\right];$$

$$B = (0{,}182/r)\left(\frac{R}{r}\right)^2;$$

$$C = \frac{M}{r}\left[1-0{,}182\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 0{,}022\left(\frac{R}{r}\right)^4 - 0{,}006\left(\frac{R}{r}\right)^6 - 0{,}03\left(\frac{R}{r}\right)^8\right],$$

где M — масса Земли, R — ее радиус. Формулы носят приближенный характер.

Для смещения перигея найдена формула

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)_s \left[1 + 0{,}091\left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{4+e}{(1-e)^2}\right],$$

где $\left(\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)_s$ — шварцшильдовское смещение перигея; e и a—эксцентриситет и большая полуось орбиты.

В 1953 г. Гильварри рассмотрел вопрос о возможности подтверждения релятивистского смещения перигелиев планетных орбит из наблюдений над малыми планетами с большими эксцентриситетами. В частности, рассмотрена планета 1566 Икар, имеющая наибольший эксцентриситет ($e=0{,}83$). Смещение перигелия Икара должно быть $10'',05$ в столетие. «Для определения из наблюдения движения перигелия Икара должна быть построена точная классическая теория возмущений. К Меркурию Икар может подходить на расстояние 0,1 *а. е.* Действие Юпитера не очень значительно, так как Икар, обладающий большим эксцентриситетом, ненадолго попадает в область влияния Юпитера» [80].

Указывается на то, что для наблюдения смещения $\psi=10'',05$ и $e\psi=8'',3$ понадобятся десятилетия астрономических наблюдений, но что возможная точность определения смещения в несколько раз выше, чем для Меркурия.

Хофлейт отмечает, что, хотя перигелий орбиты Икара перемещается со скоростью, меньшей скорости перемещения точек перигелия Меркурия, точность измерений в отношении Икара должна получиться гораздо большей. В дальнейшем подробно рассматривался вопрос об использовании искусственных спутников для проверки релятивистского смещения перигелия [80, стр. 16].