«для которых возможна физическая адаптация и имеет место физический принцип относительности», выражается преобразованиями Лоренца. 3) Нельзя утверждать, что законы природы исчерпываются тензорными соотношениями. Интегральные свойства не менее важны, чем локальные. Существование гармонических координат есть интегральное свойство пространства — времени.

В настоящее время вопрос о практическом значении гармонических координат не является спорным. Спорным остается вопрос о необходимости понятия «физической относительности» и особой преимущественной роли «гармонических координат».

Х. Цзю и В. Гоффман, опираясь на формулировку Эйнштейна, гласящую, что «общие законы природы должны описываться уравнениями, справедливыми во всех системах координат, т. е. ковариантными относительно любых замен вообще (общековариантными)» [104, стр. 19], писали о существовании двух пониманий этого принципа.

Первая трактовка принципа гласит, что выбор системы координат не имеет отношения к содержанию теории. В таком ограниченном смысле, не вводя нового физического содержания, можно выразить все законы физики в ковариантном виде.

Цзю и Гоффман полагают, что Эйнштейн придерживался второй трактовки, а именно, «что законы природы это геометрические утверждения относительно физических объектов и что такие законы должны сохранять свою силу в пространствах с произвольными геометриями» [104, стр. 20].

В частной теории относительности на геометрию наложены априорные ограничения, соответствующие лоренц-инвариантности, в то время как в общековариантной теории геометрия определяется на основании полевых уравнений.

Дж. Андерсон полагал, что между принципом относительности для данного класса теории и соответствующей им группой ковариантности не существует взаимно однозначного соответствия, поскольку всегда существует возможность расширения группы ковариантности от конечнопараметрической группы Ли до группы, содержащей набор произвольных функций.

10. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЭЙНШТЕЙНА (1917—1924)

В работе 1917 г. «О специальной и общей теории относительности» Эйнштейн рассмотрел вопрос о космологических затруднениях теории Ньютона. Первое затруднение — вопрос о системе отсчета в классической механике. Классическая механика исходит из того, что материальные точки, достаточно удаленные от других материальных точек, движутся прямолинейно и равномерно или же находятся в состоянии покоя. Этот закон выполняется лишь для систем отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Кроме того, «...тщетно было бы искать в классической механике (а также в специальной теории относительности) то реальное нечто, к которому можно было бы свести различное поведение тел относительно систем отсчета K и K'. (Это возражение приобретает особое значение в том случае, когда состояние движения тел отсчета таково, что для своего сохранения оно не нуждается во внешнем воздействии, например, в случае равномерного вращения тела отсчета.) Это возражение предвидел уже Ньютон, который тщетно стремился ослабить его» [26, стр. 566]. Второе затруднение было подробно рассмотрено Зеелигером. Закон тяготения Ньютона позволяет определить поле тяготения по распределению масс в пространстве. Этот закон, однако, не приводит к определенным конечным значениям для гравитационных ускорений, если полагать, что поле тяготения создано бесконечной массой Вселенной. Представление о средней одинаковой плотности масс Вселенной несовместимо с теорией Ньютона.

«...Больше того, последняя требует, чтобы мир имел нечто вроде центра, где плотность числа звезд была бы максимальной и чтобы эта плотность убывала с расстоянием от центра так, что на бесконечности мир был бы совсем пустым. Звездный мир должен представлять собой конечный остров в бесконечном океане пространства» [26, стр. 583].

Эйнштейн отмечает, что это представление, не будучи удовлетворительно само по себе, приводит к следствию, «что свет, излучаемый звездами, а также отдельные звезды звездной системы должны непрерывно удаляться в бесконечность, никогда не возвращаясь и не вступая во взаимодействие с другими объектами природы. Такой мир, материя которого сконцентрирована в конечном пространстве, должен был бы медленно, но систематически опустошаться» [26, стр. 583—584].

Зеелигер изменил закон Ньютона. Он предположил, что на больших расстояниях протяжение двух масс убывает быстрее, чем по закону $1/r^2$. Плотность может оставаться постоянной всюду во Вселенной, не приводя к бесконечным полям тяготения.

«Так,— пишет Эйнштейн,— можно освободиться от неприятного представления о том, что материальный мир обладает каким-то центром. Правда, это освобождение от описанных выше принципиальных трудностей достигается ценой изменения и усложнения закона Ньютона, которые не имеют ни экспериментального, ни теоретического обоснования. Можно указать сколько угодно законов, приводящих к тому же результату, причем нет оснований предпочесть один другому; каждый из этих законов, как и закон Ньютона, не обоснован общими теоретическими принципами» [26, стр. 584]. Далее Эйнштейн анализирует возможность конечного и все же неограниченного мира.

Судить о геометрической структуре пространства, согласно общей теории относительности, можно лишь, полагая известным состояние материи. Если представить себе, что мир по своим геометрическим свойствам подобен поверхности, в некоторых частях искривленной, но не отклоняющейся значительно от плоскости, то такой квазиевклидовый мир был бы пространственно бесконечным. Средняя плотность материи в квазиевклидовом мире должна равняться нулю. «Но если средняя плотность материи в мире даже очень мало отличается от нуля, то мир не может быть квазиевклидовым. Больше того, вычисления показывают, что при равномерно распределенной материи мир с необходимостью должен быть сферическим (или эллиптическим). Так как в действительности в отдельных областях материя распределена неравномерно, то реальный мир в отдельных частях будет отклоняться от сферического; он будет квазисферическим. Однако он должен быть конечным. Теория дает простое соотношение между пространственной протяженностью мира и средней плотностью материи в нем» [26, стр. 588].

В 1918 г. в статье «Закон сохранения энергии в общей теории относительности» Эйнштейн, ссылаясь на работу 1917 г., посвященную вопросам космологии, вновь подчеркнул, что с точки зрения общей теории относительности понимание мира в целом как приближенно евклидовского вызывает сомнения. Мир в этом случае должен быть пустым.

Мы должны считать, что чем бóльшие области рассматриваем, тем менее должна отличаться от нуля средняя плотность находящейся в них весомой материи.

Эйнштейн полагает вероятным, что мир в пространственном отношении квазисферический. «В этом случае конечного мира,— пишет Эйнштейн,— возникает интересный вопрос о том, справедливы ли законы сохранения для мира как целого, который с необходимостью должен рассматриваться как «изолированная система». При этом мы можем ограничиться пониманием мира как квазисферического, поскольку из последнего при добавлении соответствующего условия симметрии вытекает квазиэллиптический мир» [26, стр. 654]. Эйнштейн доказывает, что для замкнутого мира в целом импульс равен нулю. Значение полной энергии не зависит от выбора системы координат и времени. В 1919 г. в статье «Гравитационные поля и элементарные частицы материи» Эйнштейн предполагал, что теоретически можно построить материю из гравитационного и электромагнитного полей и что эта возможность освобождает от необходимости введения особой постоянной для решения космологической проблемы.

В 1917 г. Эйнштейн опубликовал работу «Вопросы космологии и общая теория относительности», положившую начало релятивистской космологии.

Как известно, уравнение Пуассона в совокупности с уравнением движения материальной точки не вполне заменяет теорию дальнодействия Ньютона, поскольку необходимо добавить условие, что в пространственной бесконечности потенциал стремится к определенному пределу. «Аналогично обстоит дело в теории тяготения, следующей из общего принципа относительности; здесь также к дифференциальным уравнениям должны быть добавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространстве» [26, стр. 601].

Эйнштейн анализирует условие существования постоянного предела для потенциала φ в пространственной бесконечности и показывает, что возникающие при этом трудности непреодолимы в рамках теории Ньютона. Он видоизменяет уравнение Пуассона, придав ему вид

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho,$$

где λ — универсальная постоянная.

Решение уравнения $\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0$ соответствует бесконечно протяженному пространству, в среднем равномерно заполненному материей.

Эйнштейн предлагает последовать по пройденному им самим извилистому и неровному пути, полагая, что так станет интереснее конечный результат. Модификация, соответствующая переходу от уравнения Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi K\rho$ к уравнению $\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho$, приводит к тому, что граничные условия в пространственной бесконечности вообще отпадают, поскольку мировой континуум в отношении своих пространственных размеров может рассматриваться как замкнутый континуум, имеющий конечный пространственный объем.

В этой работе Эйнштейн критически оценил найденные им уавнения гравитации. Как известно, эти уравнения имеют вид

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \qquad (1)$$

где

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}$$

свернутый тензор кривизны пространственно-временно́го континуума; $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор,

$$G = G_\alpha^\alpha; \qquad (2)$$

$T_{\mu\nu}$ — тензор энергии и импульса, являющийся функцией состояния среды и исчезающий в вакууме; $\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}$ — постоянная тяготения

Эйнштейна; γ — постоянная тяготения Ньютона; c — фундаментальная скорость.

Система уравнений (1) *не будет удовлетворена, если*

$$g_{44} = 1; \tag{3}$$

$$g_{14}=g_{24}=g_{34}=0 \tag{4}$$

и если для потенциалов $g_{\mu\nu}$, у которых оба индекса отличаются от 4

$$g_{\mu\nu} = -\left[\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right], \tag{5}$$

а вместо $T^{\mu\nu}$ взято его значение

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}$$

Эйнштейн обобщает уравнения (1), придав им вид

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{6}$$

Вычисления выполнены для одной точки ($x_1=x_2=x_3=x_4=0$). Для $g_{\mu\nu}$ всюду, где $g_{\mu\nu}$ не дифференцированы или же продифференцированы только один раз, надо подставить значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

При этом

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Учитывая (1), (3) и (4), находят, что все уравнения (6) удовлетворяются, если

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2}, \quad -\lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2}, \quad \text{или } \lambda = \frac{\varkappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}.$$

Космологическая постоянная может быть определена, если известны ρ — средняя плотность распределения, сохраняющаяся в состоянии равновесия, R — радиус сферического пространства, $2\pi^2 R^3$ — объем.

Полная масса Вселенной

$$M = \rho\, 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\varkappa} = \frac{\sqrt{32}\pi^2}{\sqrt{\varkappa^3\rho}}.$$

«Теоретическое представление о реальном мире, согласно нашим рассуждениям, было бы следующим. Характер кривизны пространства в соответствии с распределением материи зависит от места и времени; однако это пространство в целом можно приближенно представить в виде сферического пространства» [26, стр. 612].

Логически это представление непротиворечиво, для Эйнштейна существенно и то, что оно является естественным с точки зрения общей теории относительности.

«Мы,— пишет Эйнштейн,— не будем здесь рассматривать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний. Правда, для того, чтобы прийти к этому непротиворечивому представлению, мы должны были все же ввести новое обобщение уравнений гравитационного поля, неоправдываемое нашими действительными знаниями о тяготении» [26, стр. 612]. То, что положительная кривизна пространства, которая обусловлена материей, получается и при отсутствии космологического члена, является для Эйнштейна весьма важным аргументом. Космологический член введен для обеспечения квазистатического распределения материи.

Таким путем было положено начало релятивистской космологии.

В 1921 г. Эйнштейн опять вернулся к высказанной в 1917 г. идее о том, что квазистатическое распределение материи соответствует фактически малым скоростям звезд.

«Для построения удовлетворительной концепции поля $g_{\mu\nu}$ космических размеров, по-видимому, важен тот факт, что относительные скорости звезд малы по сравнению со скоростью света. Действительно, отсюда следует, что при соответствующем выборе координатной системы, g_{44} почти постоянна во Вселенной, по крайней мере в той ее части, в которой имеется материя» [28, стр. 77, 78]. Далее Эйнштейн указывает, что кажется естественным допущение о наличии звезд во всех частях Вселенной. Непостоянство g_{44} связано с тем, что вещество не распределено непрерывно. Это распределение можно заменить условным распределением постоянной плотности, в такой Вселенной имеет место геометрическая эквивалентность всех пространственных точек и направлений.

«Особенно привлекательным в этой схеме является то, что Вселенная оказывается пространственно ограниченной и, согласно нашему предположению о постоянстве плотности σ, обладает постоянной кривизной, будучи сферической или эллиптической. В этом случае граничные условия на бесконечности, столь неудобные с точки зрения общей теории относительности, заменяются гораздо более естественными условиями для замкнутой поверхности» [28, стр. 78].

В этой работе Эйнштейн выдвигает три аргумента против концепции пространственно бесконечной Вселенной, одновременно служащие аргументами в пользу представлений ограниченной в пространстве Вселенной.

Интересно, что на первое место Эйнштейн выдвигает тот факт, что с точки зрения теории относительности условия для замкнутой поверхности проще, чем граничные условия на бесконечности в случае квазиевклидовой структуры Вселенной.

Вторым аргументом служит то, что идеи Маха нельзя согласовать с концепцией квазиевклидовой бесконечной Вселенной. Третьим аргументом служит то, что хотя предположение о равной нулю средней плотности во Вселенной логически и возможно, оно менее вероятно, чем предположение об отличной от нуля конечной средней плотности материи. В том же году в докладе «Геометрия и опыт» Эйнштейн ставит в первую очередь второй аргумент, отмечая, что этот аргумент не производит никакого впечатления на многих физиков и астрономов. Какая из возможностей нулевой плотности или плотности, отличной от нуля, осуществлена в природе, может решить только опыт. Иллюзорной кажется Эйнштейну определение средней плотности путем наблюдения доступной нашему восприятию части Вселенной. Более перспективен, хотя и встречает также большие трудности, другой путь. Кроме расхождений следствий общей теории относительности от следствий теории Ньютона в эффектах, проявляющихся вблизи тяжелых масс, для пространственно конечного мира «имеется второе расхождение с теорией Ньютона, которое на языке последней можно выразить так: гравитационное поле обладает такими свойствами, как если бы кроме весомых масс оно создавалось также равномерно распределенной в пространстве плотностью массы, имеющей отрицательный знак. Так как эта фиктивная плотность массы крайне мала, то ее можно заметить только в случае очень больших гравитирующих масс. Предположим, что мы примерно знаем статистическое распределение звезд в Галактике, а также их массы. Тогда на основе закона Ньютона мы можем рассчитать гравитационное поле и те средние скорости звезд, которые они должны иметь для того, чтобы в Галактике не произошел коллапс, вследствие взаимного притяжения звезд, и она сохраняла бы свои размеры. Если бы теперь средние скорости звезд — которые могут быть измерены — оказались в действительности меньше вычисленных, мы бы имели указание на то, что на больших расстояниях реальные притяжения меньше, чем следует из закона Ньютона. Из такого расхождения можно было бы косвенным образом доказать конечность мира и даже оценить его пространственные размеры» [28, стр. 89].

В 1922 г. появилась работа Фридмана, коренным образом изменившая отношение Эйнштейна к космологической проблеме. Эйнштейн вначале считал, что космологическое решение уравнения поля должно быть статичным, но затем признал результаты Фридмана верными. Модель стационарной Вселенной теперь потеряла свое исключительное значение и могла быть заменена моделью расширяющейся Вселенной. Представление о замкнутой модели могло быть заменено представлением об открытой модели. Стала ненужной и космологическая постоянная. Решение гравитационных уравнений Эйнштейна, найденное Фридманом, основано на предположении о полной однородности и изотропии распределения материи в пространстве.

При указанном предположении можно рассматривать два варианта: 1) соответствующий пространству постоянной положительной кривизны (закрытая модель), 2) соответствующий пространству постоянной отрицательной кривизны (открытая модель). Вещество предполагается неподвижным относительно специально выбранной пространственной координатной системы, время предполагается ортогональным к введенному пространству. Уравнения тяготения Эйнштейна Фридман записывает в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \pm \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad \text{(A)}$$

где g_{ik} — гравитационные потенциалы, T_{ik} — тензор материи, $\varkappa$ — постоянная; $R = g^{ik} R_{ik}$.

Тензор

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} \begin{Bmatrix} ik \\ \sigma \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \begin{Bmatrix} ik \\ \sigma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\sigma \\ \alpha \end{Bmatrix}. \qquad \text{(B)}$$

Здесь $\begin{Bmatrix} ik \\ \sigma \end{Bmatrix}$ — символ Кристоффеля второго рода.

Тензор материи T_{ik} определяется равенствами

$$\begin{cases} T_{ik} = 0, \text{ если } i \text{ и } k \text{ одновременно не равны } 4 \\ T_{44} = c^2 \rho g_{44}, \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

где ρ — плотность материи; c — фундаментальная скорость. Этим выражены предположения первого класса.

В первой работе «О кривизне пространства» рассматривается случай положительной кривизны.

Предположения Фридмана выражаются в следующем:

1) Интервал ds, определяемый равенством $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, записывается в виде

$$ds^2 = R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + 2g_{14}\, dx_1\, dx_4 + \\ + 2g_{34}\, dx_3\, dx_4 + 2g_{24}\, dx_2\, dx_4 + g_{44}\, dx_4^2,$$

Здесь R есть функция (времени) x_4 и пропорционально радиусу кривизны пространства; x_1 и x_2 изменяются в интервале $(0, \pi)$, а x_3 — в интервале $(0, 2\pi)$.

2) В силу принятой ортогональности времени и пространства g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль.

Квадрат элементарного интервала, в силу приведенных предположений, принимает вид

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + M^2 dx_4^2. \qquad \text{(D)}$$

Здесь R зависит только от x_4; M — функция (x_1, x_2, x_3, x_4).

Если в формуле для ds^2 положить R не зависящим от времени и равным $-R^2/c^2$, а $M=1$, то получим Вселенную Эйнштейна

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + dx_4^2.$$

При замене R^2 на $-R^2/c^2$, а M — на $\cos x_4$, получим Вселенную де Ситтера

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + \cos^2 x_1\, dx_4^2.$$

Фридман исследовал как стационарный случай $R=\text{const}$, так и случай нестационарный $R=R(t)$.

В стационарном случае выражение для квадрата элемента длины на сфере приводит к обобщенным решениям Эйнштейна и де Ситтера.

В этой работе Фридман исследовал особенно интересный случай нестационарного мира.

M в этом случае есть функция только x_4. Можно, соответственно изменяя x_4, без ограничения общности положить $M=1$.

Величину ds^2 можно выразить в форме

$$ds^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + dx_4^2.$$

Как обычно, Фридман определяет R и ρ из уравнений

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \pm \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Уравнения, в которых $i=k=1, 2, 3$, дают соотношение

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \qquad (4)$$

а уравнение, в котором $i=k=4$, дает равенство

$$\frac{3R'^2}{R^2}+\frac{3c^2}{R^2}-\lambda=\varkappa c^2\rho, \tag{5}$$

$$R'=\frac{dR}{dx_4};\quad R''=\frac{d^2R}{dx_4^2};$$

x_4 заменяют в целях удобства на t.

Интегрирование уравнения (4) приводит к уравнению

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{A-R+\frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R}, \tag{6}$$

где A — произвольная постоянная.

Решая уравнение относительно R, находим

$$t=\frac{1}{c}\int_a^R \frac{x}{A-x+\frac{\lambda}{3c^3}x^3}\,dx+B, \tag{7}$$

где B и a — постоянные.

Из уравнения (5) определяем ρ:

$$\rho=3A/\varkappa R^3.$$

Постоянная

$$A=\varkappa M/6\pi^2.$$

В 1924 г. А. А. Фридман исследовал возможность мира с постоянной отрицательной кривизной пространства. Он различает и в этой работе два случая: 1) случай стационарного мира, 2) случай нестационарного мира, кривизна которого постоянна в пространстве, но меняется во времени.

Миры с отрицательной стационарной кривизной не допускают положительной плотности вещества, плотность должна быть или отрицательной, или нулевой. В качестве космологических уравнений Эйнштейна за основу берут уравнения (A, B, C).

Интервалу ds^2 Фридман придает вид

$$ds^2=\frac{R^2(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)}{x_3^2}+M^2dx_4^2,$$

где R — функция времени; M — функция от всех четырех мировых координат. Постоянная отрицательная кривизна пространства пропорциональна — $1/R^2$.

Работы Эйнштейна и Фридмана заложили основы релятивистской космологии, бурное развитие которой переплеталось с общим развитием теоретической и экспериментальной физики.