11. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Вопрос о тензоре энергии-импульса в общей теории относительности возник на втором подготовительном этапе создания теории (1913—1915 гг.). В совместной работе с М. Гроссманом «Проект обобщенной теории относительности» (1913), в которой впервые систематически применялся тензорный анализ, Эйнштейн, анализируя движение непрерывно распределенных несвязанных масс в произвольном поле тяжести, предположил, что закон сохранения импульса энергии имеет вид

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\,\theta_{\mu\nu} = 0\ (\sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (1)$$

где $g = |g_{\mu\nu}|$; $\theta_{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$ — контравариантный тензор второго ранга относительно произвольных преобразований. При $\sigma = 1, 2, 3$, из уравнения (1) получают три соотношения, выражающие закон сохранения импульса. При $\sigma = 4$ получают закон сохранения энергии. В математической части, написанной М. Гроссманом, доказана ковариантность написанных соотношений при известных условиях. Эйнштейн приписывает этим соотношениям область применения, выходящую за пределы случая движения несвязанных масс. Они выражают энергетический баланс между гравитационным полем и любой материальной системой. Тензору второго ранга $\theta_{\mu\nu}$ надо придавать значение, соответствующее тензору энергии-натяжений рассматриваемой системы. «Первая сумма в указанном соотношении содержит пространственные производные натяжений или плотности потока энергии и временные производные импульса или плотности энергии; вторая сумма выражает влияние гравитационного поля на материальный процесс» [26, стр. 236].

Получив выражение энергии-импульса для материальных явлений в их связи с гравитационным полем, Эйнштейн переходит к поискам дифференциальных уравнений, определяющих гравитационное поле. Он полагает, что эти уравнения связывают вышеприведенный контравариантный тензор второго ранга ($\theta_{\mu\nu}$) с контравариантным тензором второго ранга, образованным из производных фундаментального тензора g_{ik} ($\varkappa\theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$).

Далее Эйнштейн находит выражение для тензора энергии-натяжений гравитационного поля ($\vartheta_{\mu\nu}$), входящее в соотношение, «выражающее закон сохранения для гравитационного поля совершенно таким же образом, каким тензор $\theta_{\mu\nu}$ материального процесса в соотношение закона сохранения для этого процесса» [26, стр. 242].

Тензор гравитационного поля является источником поля наравне с тензором материальных систем.

Эйнштейн нашел, что соотношения для законов сохранения справедливы для вещества и гравитационного поля вместе взятых

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} (\theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \qquad (2)$$

Полученные уравнения можно выразить и через ковариантные тензоры.

В общей теории относительности материя через уравнения поля всегда неразрывно связана с гравитационным полем и нельзя ожидать, что законы сохранения энергии и импульса будут строго выполняться для системы лишь материальных тел.

Вопросы тензора энергии-импульса трактуются и в работах «К современному состоянию проблемы тяготения» (1913), «Дополнительный ответ на вопрос Рейснера», «Теория гравитации Нордстрема с точки зрения абсолютного дифференциального исчисления» (1914). В работе «Обобщенная теория относительности и теория гравитации» (1914) Эйнштейн вновь напоминает, что уравнение

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \overline{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{\varkappa} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\mu\tau} \overline{T}_{\nu\tau} = 0 \qquad (3)$$

не выражает закона сохранения. Вещество, взятое отдельно, не удовлетворяет законам сохранения при наличии гравитационного поля, поскольку поле тяготения передает веществу импульс и энергию. Оценивая работу «Формальные основы общей теории исследования», Смородинский писал: «Трудности, возникшие на пути теории, в основном сконцентрировались на построении тензора энергии-импульса. Эйнштейн вводит в эти работы то, что сейчас называется псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля, который обладает тензорными свойствами по отношению к линейным преобразованиям. Лишь через год, в 1915 г., в работе «К общей теории относительности» Эйнштейн отказывается от условия равенства нулю обычной (нековариантной) дивергенции тензора энергии-импульса и приходит к верному уравнению тяготения, известному теперь под названием «уравнения Эйнштейна» [26, стр. 384].

В 1916 г. в статье «Основы общей теории относительности» Эйнштейн обращается к функции Гамильтона для гравитационного поля с целью показать соответствие уравнений поля законам сохранения импульса и энергии.

Уравнения поля

$$\delta \{\textstyle\int H\, d\tau\} = 0,$$

$$H = g^{\mu\nu}\ \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\ \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \quad \sqrt{-g} = 1. \qquad (4)$$

На границах рассматриваемой ограниченной четырехмерной области интегрирования вариации равны нулю. Выполнив вариации в (4), получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0. \tag{5}$$

Эта система уравнений эквивалентна системе уравнений для свободного от материи поля:

$$\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}=0,\ \sqrt{-g}=1. \tag{6}$$

Умножив (5) на $g^{\mu\nu}_\sigma$ и учитывая, что

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_\sigma}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\sigma}$$

и, следовательно,

$$g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\sigma},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_\sigma}=0$$

или

$$\frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}=0,\ -2\varkappa t^\alpha_\sigma=g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}-\delta^\alpha_\sigma H. \tag{7}$$

При этом выполняется соотношение

$$\varkappa t^\alpha_\sigma=\frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda}-g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}. \tag{8}$$

Произведя ряд несложных преобразований, Эйнштейн получил известное выражение для закона сохранения энергии-импульса для гравитационного поля, справедливое для всех координатных систем, у которых $\sqrt{-g}=1$.

Интегрирование уравнения (7) по трехмерному объему дает четыре уравнения

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t^4_\sigma\,dV\right\}=\int(t^1_\sigma a_1+t^2_\sigma a_2+t^3_\sigma a_3)\,ds, \tag{9}$$

где a_1, a_2, a_3 — направляющие косинусы внутренней нормали к элементу поверхности.

Вместо уравнения (6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\varkappa\left(t^\sigma_\mu-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu t\right),\quad \sqrt{-g}=1, \tag{10}$$

В общем виде в уравнение (10) вместо компонента энергии гравитационного поля надо подставить сумму компонент тензора энергии материи и гравитационного поля. Далее, Эйнштейн доказал, что из уравнений гравитационного поля следует, что законы сохранения энергии-импульса выполняются:

$$\frac{\partial (t^{\sigma}_{\mu} + T^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{11}$$

Анализируя создавшееся к тому времени положение, Паули с большой проницательностью писал: «При более близком рассмотрении появляются, однако, большие затруднения, противостоящие вначале подобному пониманию. В конечном счете эти затруднения проистекают из-за того, что величины t_{ik} не образуют тензора.

Поскольку эти величины не содержат производных от g_{ik} выше первого порядка, можно сразу заключить, что при подходящем выборе координат (в геодезической системе отсчета) они могут быть сделаны равными нулю в любой заданной мировой точке» [94, стр. 255]. Шредингер нашел, что для поля материальной точки, совпадающего с полем жидкого шара во внешнем пространстве, все компоненты энергии обращаются в нуль. Бауер указал, что если ввести полярные координаты в линейный элемент специальной теории, то «компоненты энергии принимают значения, отличные от нуля, и при этом полная энергия даже бесконечна».

Леви-Чивита и Лоренц предложили компонентами энергии гравитационного поля считать $\frac{1}{\varkappa} G_{ik}$. Леви-Чивита записывает уравнения гравитационного поля в виде

$$T_{im} + A_{im} = 0, \tag{12}$$

где T_{im} — тензор энергии материи; A_{im} — ковариантный тензор, зависящий от компонент $g_{\mu\nu}$ и от их первых двух производных по координатам; A_{im} рассматриваются как компоненты тензора энергии гравитационного поля. Возражая Леви-Чивита, Эйнштейн отметил, что выдвинуть логическое возражение против его наименования нельзя, но из уравнения $T_{im} + A_{im} = 0$ нельзя вывести таких следствий, как из законов сохранения. При таком определении гравитационной энергии полная энергия замкнутой системы всегда равна нулю.

В 1918 г. Эйнштейн посвятил этим вопросам специальную статью под названием «Закон сохранения энергии в общей теории относительности». Эйнштейн отмечает, что в своей первоначальной форме закон сохранения энергии, как и закон сохранения импульса, являлся интегральным законом. Специальная теория относительности объединяла закон сохранения энергии и импульса в единый дифференциальный закон. Этот закон выражает обращение в нуль дивергенции тензора энергии. Эйнштейн оценивает уравнение ($\overline{T}_\sigma^\nu \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}}$ — тензор энергии «материи»).

$$\frac{\partial \overline{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \overline{T}_{\mu\nu} = 0$$

как разумное, с формальной точки зрения, перенесение этого закона на общую теорию относительности. «С физической точки зрения,— пишет Эйнштейн,— это уравнение не может рассматриваться как полноценный эквивалент законов сохранения импульса и энергии, поскольку ему не соответствуют интегральные соотношения, которые могли бы быть истолкованы как законы сохранения импульса и энергии... Опыт вынуждает нас искать такой дифференциальный закон, который был бы эквивалентен *интегральным* законам сохранения импульса и энергии» [26, стр. 651]. Другая формулировка

$$\frac{\partial \overline{U}_\sigma^\mu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{a}$$

где $\overline{U}_\sigma^\nu = \overline{T}_\sigma^\nu + \overline{t}_\sigma^\nu$, встретила возражения, поскольку $\overline{U}_\sigma^\nu$ и t_σ^ν не являются тензорами. Ученые, например Бауер, подчеркивают, «что в некоторых случаях путем соответствующего выбора системы координат можно добиться обращения в нуль всех $\overline{U}_\sigma^\nu$ или задать им отличные от нуля значения. Поэтому почти все сомневаются в уравнении (а)» [26, стр. 651].

Эти трудности вытекали из особого характера гравитационной энергии, учитываемой косвенно, через потенциал тяготения, и существуют и в настоящее время.

Ландау и Лифшиц при рассмотрении тензора энергии-импульса варьируют интеграл действия вида

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) dV\, dt = \frac{1}{ic} \int \Lambda\, d\Omega, \tag{1}$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы и их производных по координатам и времени. Варьирование S приводит к выражению

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial q / \partial x_i)} \delta \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{ic} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)} \right] d\Omega = 0.$$

Второй член под знаком интеграла, преобразованный по теореме Гаусса, при интегрировании по всему пространству исчезает.

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0, \quad q_{,i} \equiv \frac{\partial q}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Но

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}, \tag{3}$$

суммирование в (3) производится по i.

Подставив в (2) соотношение (3) и учитывая, что

$$\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k},$$

находим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right) q_{,i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right). \tag{4}$$

Но

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k},$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i}\right) \tag{5}$$

или

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \text{где } T_{ik} = \delta_{ik}\Lambda - q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}. \tag{6}$$

Уравнение $\partial T_{ik}/\partial x_k = 0$ указывает на сохранение вектора, компоненты которого равны интегралам от T_{ik} по гиперповерхности

$$P_i = \int T_{ik}\, dS_k. \tag{7}$$

Тензор энергии-импульса T_{ik} не является сам по себе симметричным. Таким его надо сделать, прибавив к нему выражение $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, где ψ антисимметрично по индексам k и l.

Авторы проводят другой способ вычисления тензора энергии-импульса, сразу приводящего к правильному выражению [105]. Интеграл действия в криволинейных координатах они преобразуют от координат x^i к координатам $x^i + \xi^i$, где ξ^i — малые величины.

На первом этапе дискуссии об энергии гравитационного поля участвовали Эйнштейн, Гильберт, Лоренц, Леви-Чивита, Бауер, Шредингер, Паули. На втором этапе — Меллер, Комар, Голдберг, Флетчер, Мицкевич и многие другие.

В 1958 г. Меллер предложил видоизменить псевдотензор Эйнштейна. В работе «Энергия незамкнутых систем в общей теории относительности» он писал, что при соответствующем определении плотности псевдотензора энергии-импульса можно получить инвариантное по отношению к пространственным преобразованиям выражение для энергии конечной области пространства. Он полагает, что при расчете полной энергии замкнутой системы нет необходимости в квазигалилеевых координатах. Тем самым, по Меллеру, создана основа для трактовки энергии внутри незамкнутых систем.

В статье «О теоремах сохранения и координатных системах в общей теории относительности» Траутман рассматривает законы сохранения в общей теории относительности, соблюдая условия: 1) законы должны быть общековариантными, 2) их возможно сформулировать в интегральной форме, 3) в плоском пространстве-времени они должны совпадать с соответствующими законами специальной теории относительности. «Следуя идее Нетер, автор показывает, что каждому инфинитезимальному движению пространства-времени соответствует определенный закон сохранения для системы поле — частица. Общее число таких законов равно числу независимых движений, допускаемых данным пространством-временем. Показано далее, что каждому движению, относительно которого поле является неинвариантным, соответствует один первый интеграл уравнений движения частицы. Утверждается, что понятие энергии можно определить только в стационарном пространстве-времени; в нестационарных пространствах-временах закона сохранения энергии не существует...» [106].

Голдберг (1958) на основании трансформационных свойств лагранжиана относительно инфинитезимальных преобразований координат вывел законы сохранения, полученные Эйнштейном в работах 1916 и 1918 гг. Им использован «комплекс», т. е. псевдотензор со смешанными значками для закона сохранения энергии. Рассматривается связь между этим псевдотензором и симметричным псевдотензором, введенным Ландау и Лифшицем [107].

Н. Мицкевич показал, как можно получить законы сохранения, исходя из инвариантности лагранжиана. Дана классификация сохраняющихся величин по типам инфинитезимальных преобразований [108].

В том же году П. Бергманом «по аналогии с известной теоремой Нетер получены обобщенные законы сохранения как источники инвариантности вариационного интеграла относительно произвольных бесконечно малых преобразований координат». Законы эти справедливы, по Бергману, для любого поля, которое описывается величинами, обладающими более общими трансформационными свойствами, чем тензоры. Рассматривается и гравитационное поле [109].

Комар методом Бергмана рассмотрел вопрос о сохранении энергии особо подробно [110]. Н. В. Мицкевич и Д. Д. Иваненко, подчеркивая неэффективность предлагавшихся ранее методов определения энергии гравитационного поля, предложили квазитензор энергии-импульса, уточняющий существующие [111].

В. А. Фок почти через полвека после первой работы Эйнштейна писал: «Наличие гравитационного поля и связанной с ним энергии проявляется, как мы знаем, в изменении свойств пространства и времени. Выделить гравитационную энергию в виде добавочных членов в тензоре энергии можно только искусственно, фиксировав координатную систему и видоизменив постановку задачи, а именно рассматривая поле тяготения как бы вложенным в пространство-время с фиксированными свойствами» [112]. Добавочные члены, соответствующие гравитационной энергии, не обладают свойствами ковариантности, ввиду неоднозначного выбора пространства с фиксированными свойствами.

Гравитационную энергию нельзя локализовать. В. А. Фок указывает еще на одну причину, в силу которой система движущихся масс не будет изолированной в смысле отдачи энергии. Эта причина — излучение системой электромагнитных и гравитационных волн.

В 1959 г. Меллер рассмотрел характер выражения для комплекса энергии-импульса непосредственно из математических свойств инвариантности теории.

В 1961 г. Меллер [113] сформулировал условия для тензора энергии-импульса:

1) в каждой мировой точке он является аффинной тензорной плотностью, алгебраически зависящей от метрического тензора и его производных;

2) он удовлетворяет локальному закону сохранения (обращение в нуль обычной расходимости);

3) временная компонента T_4^k образует 4-мерный вектор по отношению к чисто пространственным преобразованиям.

Если эти условия выполняются, то можно говорить о локализации энергии. Известные формы тензора энергии-импульса не удовлетворяют приведенным условиям. Полагая, что такой тензор вообще построить нельзя, Меллер решает проблему локализации гравитационной энергии отрицательно.

Для энергетической характеристики гравитационного поля предлагается использовать 4-мерный вектор плотности потока энергии.

В 1965 г. М. Ф. Широков сжато изложил свою точку зрения по вопросу об энергии и импульсе гравитационного поля в общей теории относительности. Он писал: «Сама по себе общая теория относительности является геометрическим учением о зависимости свойств пространства и времени от материи и ее движения и не содержит каких-либо представлений о гравитационных силах, энергии-импульсе гравитационного поля и т. п.» [114, стр. 18]. Как гравитационные силы, так и тензор импульса гравитационного поля $t^{\mu\nu}$ есть искусственный прием истолкования кривизны пространства-времени Римана «на языке сил и энергий, действующих в воображаемом плоском пространстве-времени». Поэтому $t^{\mu\nu}$ ковариантен лишь по отношению линейных преобразований координат.

В общей теории относительности имеют место лишь локальные законы сохранения $(T^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$ ($T^{\mu\nu}$ — тензор энергии материи всех частиц и полей).

«Общековариантные интегральные законы сохранения в общей теории относительности имеют смысл лишь для областей пространства с галилеевскими условиями на бесконечности» [114, стр. 18].

Тензор $t^{\mu\nu}$ позволяет заменять объемное пространственное интегрирование интегрированием по поверхности.

Некоторые ученые предлагали придать общей теории относительности «изложение типа канонического формализма» и при помощи такого формализма искать методы определения энергии (Дирак, Пирани, Бергман, Мицкевич и др.). Бель, Лихнерович и др. предложили рассматривать тензоры более высокой валентности. Пирани, Петров, Левашов, Родичев и др. предложили применить формулировку, основанную на употреблении неголономных систем координат.

Паллегрини [115], опираясь на работу Меллера, уточнил некоторые вопросы, относящиеся к вектору полной энергии-импульса в замкнутой системе.

Меллер показал, что невозможно построить тензор, удовлетворяющий четырем условиям:

1. $\theta_i^k(x^r)$ в каждой точке x^r должен быть тензором и алгебраически зависеть от g_{ik} и их производных.

2. $\theta_{i,k}^k = 0$.

3. Энергия-импульс системы, определяемая как $P_i = \int \theta_i^4 \, d^3x$, должна вести себя как 4-вектор относительно преобразований Лоренца.

4. θ_4^4 и θ_4^α ($\alpha = 1, 2, 3$) должны быть соответственно скаляром и тензором относительно группы чисто пространственных преобразований. Условия 1, 2, 4 или 1, 2, 3 однозначно приводят к не совпадающим друг с другом тензорам. Он полагает, что все может быть согласовано, если вместо P_i ввести величину

$$P_i = \int\limits_\sigma \theta_i^k / \sqrt{-g}\, \gamma_k \, d\sigma,$$

где γ — единичный вектор, тангенциальный x^4 в системе покоя; $g = \det\{g_{ik}\}$; σ—3-мерная поверхность, ортогональная к γ_k.