Наряду со связями вида (1), которые называются *удерживающими*, в механике рассматриваются также *неудерживающие* связи, которые записываются в виде неравенства

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu) \geqslant 0. \tag{11}$$

В качестве примера можно рассмотреть две материальные точки, соединенные нитью длиной l. Эта связь выражается неравенством

$$l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Если в условии (11) имеет место знак равенства, то говорят, что *связь напряжена*.

Движение системы, на которую наложена неудерживающая связь, можно разбить на участки таким образом, чтобы на одних участках связь была напряжена и движение проходило так, как если бы связь была удерживающей, а на других участках связь была не напряжена и движение проходило так, как если бы этой связи не было. Таким образом, на отдельных участках неудерживающая связь либо заменяется удерживающей, либо совсем отбрасывается. Исходя из этого, мы *в дальнейшем будем рассматривать исключительно удерживающие связи.*

§ 2. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Пусть на материальную систему наложены d конечных связей

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{1}$$

и g дифференциальных [1])

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \boldsymbol{v}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{2}$$

Заменим конечные связи вытекающими из них дифференциальными:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{3}$$

---

[1]) В уравнениях дифференциальных связей мы вместо $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ пишем $\boldsymbol{v}_\nu$.

Систему векторов $\boldsymbol{v}_\nu$ будем называть *возможными скоростями* для некоторого момента времени t и для некоторого возможного в этот момент положения системы, если векторы $\boldsymbol{v}_\nu$ удовлетворяют $d+g$ линейным уравнениям (2) и (3).

Таким образом, *возможные скорости — это скорости, допускаемые связями.* Для каждого возможного положения системы в момент времени t существует бесчисленное множество систем возможных скоростей. При действительном движении системы в момент t реализуется одна из этих систем скоростей.

Систему бесконечно малых перемещений

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu\, dt \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{v}_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$ — возможные скорости, будем называть *возможными бесконечно малыми перемещениями* или для сокращения просто *возможными перемещениями.* Умножив уравнения (2) и (3) почленно на dt, получим уравнения, определяющие возможные перемещения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\, d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\, dt = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\, d\boldsymbol{r}_\nu + D_\beta\, dt = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и для одного и того же положения системы:

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu dt \quad \text{и} \quad d'\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}'_\nu dt \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Как $d\boldsymbol{r}_\nu$, так и $d'\boldsymbol{r}_\nu$ удовлетворяют уравнениям (5), а разности

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

удовлетворяют однородным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\, \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\, \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Разности $\delta \boldsymbol{r}_\nu = d'\boldsymbol{r}_\nu - d\boldsymbol{r}_\nu$ будем называть *виртуальными перемещениями*. Всякая система векторов $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая уравнениям (7), представляет собой систему виртуальных перемещений. Уравнения (7) для виртуальных перемещений отличаются от уравнений (5), определяющих возможные перемещения, отсутствием членов $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$ и $D_\beta dt$. Поэтому говорят, что *виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при «замороженных» связях.*

Действительно, при «замораживании» время t, входящее в уравнения конечных связей, фиксируется, т. е. связь как бы застывает в той конфигурации, которую она имела в момент t. Тогда при дифференцировании функций f_α члены $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$ не появляются и первые d уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7). Для дифференциальной связи «замораживание» означает придание ей стационарного характера, т. е. отбрасывание D_β в левой части уравнений связи и фиксирование t, явно входящего в коэффициенты $l_{\beta\nu}$. После этого и последние g уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7).

Можно еще сказать, что виртуальные перемещения представляют собой перемещения точек системы из одного возможного положения системы в момент t в другое бесконечно близкое, возможное *для того же самого момента времени* t положение системы.

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными.

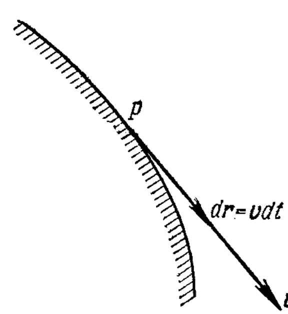

Рис. 1.

Примеры. 1. *Точка движется по неподвижной поверхности* (рис. 1).

В этом случае любой вектор $\boldsymbol{v}$, построенный из точки P и касательный к поверхности в этой точке, будет представлять собой возможную скорость. Соответствующее возможное перемещение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ также лежит в плоскости, касательной к поверхности в точке P. Разность $\delta \boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r}$ двух касательных векторов в свою очередь представляет собой вектор, касающийся поверхности в той же точке. Таким образом, любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, можно рассматривать как некоторое $d\boldsymbol{r}$ и как некоторое $\delta\boldsymbol{r}$. В данном примере связь стационарна и виртуальные перемещения совпадают с возможными.

2. Связь представляется *поверхностью S, которая сама движется* (как твердое тело) с некоторой скоростью $\boldsymbol{u}$ относительно исходной системы координат (рис. 2).

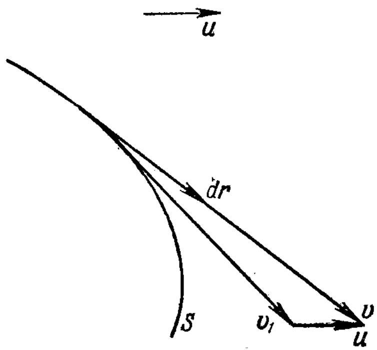

Рис. 2.

В этом случае возможная скорость $\boldsymbol{v}$ получается из произвольного вектора $\boldsymbol{v}_1$, касательного к поверхности, прибавлением к нему скорости $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}.$$

Поэтому

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{v}_1\,dt + \boldsymbol{u}\,dt.$$

Аналогично для другого возможного перемещения

$$d'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_1'\,dt + \boldsymbol{u}\,dt$$

и виртуальное перемещение

$$\delta\boldsymbol{r} = d'\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1)\,dt$$

представляет собой, в отличие от $d\boldsymbol{r}$, вектор, лежащий в плоскости, касательной к поверхности в точке P (рис. 3). Вектор $\delta\boldsymbol{r}$ представляет собой возможное перемещение для «остановленной» поверхности S.

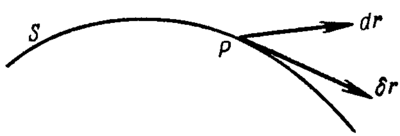

Рис. 3.

В декартовых координатах вектор $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ характеризуется тремя проекциями на оси δx_ν, δy_ν, δz_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$, и уравнения (7), определяющие виртуальные перемещения, могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d),\\ &\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\,\delta x_\nu + B_{\beta\nu}\,\delta y_\nu + C_{\beta\nu}\,\delta z_\nu) = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Если эти $d + g$ уравнений независимы, то среди $3N$ виртуальных приращений координат δx_ν, δy_ν, δz_ν будет

$n=3N-d-g$ независимых. Число n называется *числом степеней свободы* данной системы материальных точек.

Пусть в точках P_ν системы приложены соответственно силы $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$) [1]. Если бы связи отсутствовали, то, согласно второму закону Ньютона, между массами m_ν, ускорениями $\boldsymbol{w}_\nu$ и силами $\boldsymbol{F}_\nu$ имели бы место соотношения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$). При наличии связей ускорения $\boldsymbol{w}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ могут оказаться (в данный момент времени t, в данном положении точек системы $\boldsymbol{r}_\nu$ и при заданных скоростях $\boldsymbol{v}_\nu$) несовместимыми со связями. Действительно, продифференцировав почленно равенства (3) и (2) по времени, мы получим аналитическое выражение для ограничений, накладываемых связями на ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ точек системы [2]:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\right)\boldsymbol{v}_\nu + \frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha=1, \ldots, d), \\ \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\boldsymbol{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_{\beta\nu}}{dt}\boldsymbol{v}_\nu + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \quad (\beta=1, \ldots, g). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ускорения $\boldsymbol{w}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ могут не удовлетворять этим соотношениям. Тогда материально осуществленные связи действуют на материальные точки системы P_ν с некоторыми дополнительными силами $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$); эти силы воздействия связей $\boldsymbol{R}_\nu$ носят название *реакций связей* [3]. Возникающие реакции таковы, что ускорения, определяемые из уравнений

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu=1, \ldots, N), \tag{9}$$

уже допускаются связями.

В отличие от реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$) заранее заданные силы $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$) называются *активными силами*.

---

[1]) Под $\boldsymbol{F}_\nu$ мы понимаем равнодействующую всех сил, приложенных непосредственно к материальной точке P_ν ($\nu=1, \ldots, N$).

[2]) Левые части в соотношениях (8) линейно зависят от ускорений $\boldsymbol{w}_\nu$. Эти левые части, как легко усмотреть после выполнения дифференцирования, зависят еще и от t, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, N$).

[3]) При наличии нескольких связей ($d+g>1$) $\boldsymbol{R}_\nu$ есть равнодействующая всех реакций связей для точки P_ν ($\nu=1, \ldots, N$).

Активные силы обычно задаются как известные функции от времени, положения и скоростей точек системы [1]):

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{10}$$

Основная задача динамики несвободной системы состоит в следующем.

Заданы активные силы $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$, *и даны совместимые со связями начальные положения* $\boldsymbol{r}_\nu^0$ *и начальные скорости* $\boldsymbol{v}_\nu^0$ *точек системы* $(\nu = 1, \ldots, N)$. *Требуется определить движение системы и реакции связей* $\boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ [2]).

Если относительно характера связей ничего неизвестно, кроме определяющих уравнений (1) и (2), и, следовательно, ничего неизвестно относительно вызываемых этими связями реакций $\boldsymbol{R}_\nu$, то сформулированная выше задача является неопределенной, так как число подлежащих определению скалярных величин x_ν, y_ν, z_ν, $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ большие числа имеющихся скалярных соотношений — уравнений $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}$, $m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}$, $m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$ и уравнений связей (1) и (2) $[6N > 3N + d + g]$.

Для того чтобы основная задача динамики стала определенной, необходимо иметь какие-то дополнительные $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$ независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения мы получим, если ограничимся важным классом *идеальных связей.*

Связи называются *идеальными, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т. е. если*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{11}$$

Это равенство можно переписать и в развернутом виде:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) = 0. \tag{11'}$$

---

[1]) В общем случае правые части в равенствах (10) зависят помимо t от всех $\boldsymbol{r}_\mu$ и $\boldsymbol{v}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, N)$.

[2]) В случае свободной системы задача определения реакций отпадает и остается только задача определения движения системы.

Среди $3N$ величин δx_ν, δy_ν, δz_ν имеется n независимых ($n = 3N - d - g$ — число степеней свободы данной системы). Поэтому в равенстве (11′) можно выразить $3N - n$ зависимых приращений δx_ν, δy_ν, δz_ν через n независимых приращений и приравнять нулю коэффициенты при этих независимых приращениях. Тогда мы получим недостающие n соотношений, благодаря которым основная задача динамики несвободной системы становится определенной.

Естественность и практическая важность выделенного нами класса связей станут ясными после рассмотрения следующих примеров идеальных связей.

Примеры. 1. Материальная точка вынуждена двигаться по *неподвижной гладкой поверхности* (рис. 4).

В этом случае любое возможное перемещение $d\boldsymbol{r}$, как и любое виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}$, лежит в плоскости, касательной

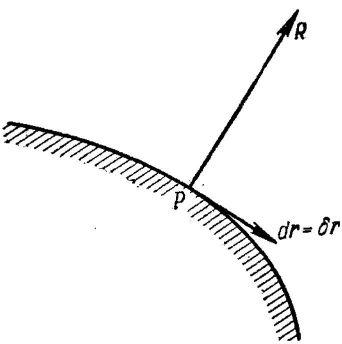

Рис. 4.

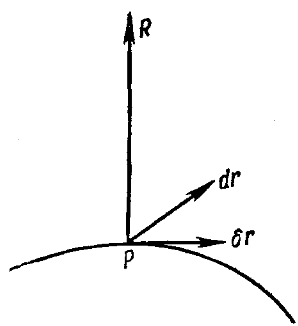

Рис. 5.

к поверхности в точке P, а реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности в этой точке; поэтому всегда

$$\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r} = 0.$$

2. Материальная точка вынуждена двигаться по *подвижной или деформирующейся гладкой поверхности* (рис. 5).

В этом случае возможная скорость материальной точки и, следовательно, бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ уже не лежит в касательной плоскости (см. пример 2 на стр. 18). Виртуальное же перемещение $\delta\boldsymbol{r}$, которое представляет собой бесконечно малое возможное перемещение для «остановленной», или «замороженной» поверхности, лежит в касательной плоскости. Поскольку реакция и в случае подвижной или деформирующейся гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности, то $\boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r} = 0$ (в то время как $\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{r} \neq 0$).

Таким образом, *гладкая поверхность, как неподвижная, так и подвижная или деформирующаяся, представляет собой идеальную связь.*

Пример 2 наглядно поясняет, почему при определении нестационарных идеальных связей необходимо приравнивать нулю работу сил реакций на произвольных виртуальных, а не возможных перемещениях.

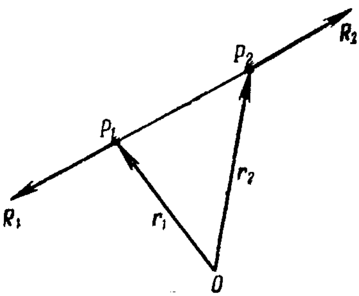

Рис. 6.

В дальнейших примерах мы встретимся уже только со стационарными связями[1]).

3. Две материальные точки *соединены стержнем неизменной длины с пренебрежимо малой массой* (рис. 6).

Обозначим через $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ реакции связи, приложенные к материальным точкам P_1 и P_2. Тогда согласно третьему закону Ньютона на стержень действуют силы $\boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{N}_2 = -\boldsymbol{R}_2$. Обозначая через m и $\boldsymbol{w}$ массу стержня и ускорение его центра инерции, а через I и ε — центральный момент инерции и угловое ускорение, будем иметь:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2, \quad I\varepsilon = L,$$

где L — суммарный момент сил $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ относительно центра инерции. Но, по условию, $m = 0$ и $I = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = 0$ и $L = 0$[2]). Из этих равенств следует, что силы $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, а значит, и $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ прямо противоположны, т. е. направлены вдоль стержня. Далее,

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{R}_2 d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1).$$

---

[1]) Из определения идеальных связей вытекает, что нестационарная связь является идеальной, если идеальными являются все ее конфигурации в различные моменты времени, рассматриваемые как стационарные связи.

[2]) Если движение стержня не плоскопараллельное, то скалярное равенство $I\varepsilon = L$ заменяется векторным $\frac{d}{dt}(\widehat{I}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{L}$, где $\widehat{I}$ — тензор инерции, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Из равенства $\widehat{I} = 0$ снова следует $\boldsymbol{L} = 0$.

Пусть $\boldsymbol{R}_2 = c(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Тогда

$$\boldsymbol{R}_1\,\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\,\delta\boldsymbol{r}_2 = c(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{c}{2}\,d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = 0,$$

поскольку $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = \text{const}$.

Можно считать, что абсолютно твердое тело является системой материальных точек, в которой на любые две точки наложена связь рассматриваемого типа. Поэтому твердое тело можно считать системой материальных точек, подчиненных идеальным связям. При отсутствии других связей, кроме связей, осуществляющих жесткое соединение точек тела между собой, твердое тело называется *свободным.*

4. Два твердых тела *шарнирно соединены в точке* A (рис. 7). Пренебрегая массой и размерами шарнира, можно утверждать (как и в предыдущем примере), что $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = 0$. Но тогда

$$\boldsymbol{R}_1\,\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}_2\,\delta\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)\,\delta\boldsymbol{r} = 0.$$

5. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально гладкими поверхностями.* (Трением пренебрегаем!) (рис. 8). В этом случае снова $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = 0$. При этом $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ направлены по общей нормали к поверхностям. С другой стороны, относительная

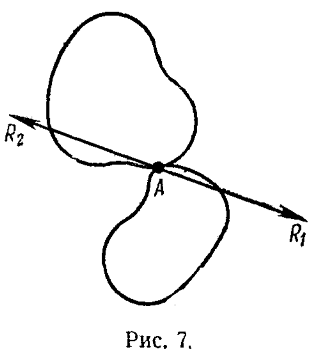

Рис. 7.

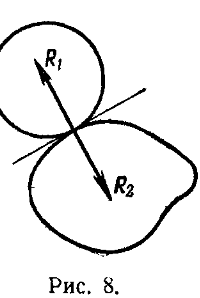

Рис. 8.

скорость этих тел в месте соприкосновения $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, а значит, и разность возможных перемещений $d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\,dt$ лежат в общей касательной плоскости. Поэтому

$$\boldsymbol{R}_1\,\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\,\delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1\,d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\,d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2\,(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = 0.$$

6. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально шероховатыми поверхностями* («зубчатое зацепление»). В этом случае относительная скорость скольжения равна $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = 0$. Следовательно, и $d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\,dt = 0$. Поэтому и здесь

$$\boldsymbol{R}_1\,\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2\,\delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2\,(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = 0.$$

Сложный механизм можно рассматривать как систему твердых тел, которые попарно либо соединены между собой жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры — идеальными, все соприкасающиеся плоскости — идеально гладкими или идеально шероховатыми, то *любой сложный механизм можно трактовать как систему материальных точек, подчиненную идеальным связям.*

Заметим, что во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Так, например, пренебрежение силами трения может иногда существенным образом исказить физическую картину явления. В этом случае условие идеальности связей следует отбросить и вместо него взять другие условия, вытекающие из характера связей и законов трения.

Однако можно поступить иначе. Можно и в этих случаях считать связи идеальными, учитывая при этом только нормальные составляющие реакций негладких поверхностей и рассматривая силы трения как неизвестные активные силы. Появление новых неизвестных компенсируется дополнительными соотношениями, получаемыми из экспериментальных законов трения.

При такой трактовке понятия идеальных связей применимость этого понятия становится практически универсальной.

В дальнейшем всегда предполагается, что все связи, наложенные на систему, являются идеальными.

§ 3. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода

Для материальных точек несвободной системы имеют место уравнения

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

где m_ν — масса ν-й точки, $\boldsymbol{w}_\nu$ — ее ускорение, а $\boldsymbol{F}_\nu$ и $\boldsymbol{R}_\nu$ — соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку ($\nu = 1, \ldots, N$). Поскольку связи идеальны, то в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$