жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры — идеальными, все соприкасающиеся плоскости — идеально гладкими или идеально шероховатыми, то *любой сложный механизм можно трактовать как систему материальных точек, подчиненную идеальным связям.*

Заметим, что во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Так, например, пренебрежение силами трения может иногда существенным образом исказить физическую картину явления. В этом случае условие идеальности связей следует отбросить и вместо него взять другие условия, вытекающие из характера связей и законов трения.

Однако можно поступить иначе. Можно и в этих случаях считать связи идеальными, учитывая при этом только нормальные составляющие реакций негладких поверхностей и рассматривая силы трения как неизвестные активные силы. Появление новых неизвестных компенсируется дополнительными соотношениями, получаемыми из экспериментальных законов трения.

При такой трактовке понятия идеальных связей применимость этого понятия становится практически универсальной.

В дальнейшем всегда предполагается, что все связи, наложенные на систему, являются идеальными.

§ 3. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода

Для материальных точек несвободной системы имеют место уравнения

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

где m_ν — масса ν-й точки, $\boldsymbol{w}_\nu$ — ее ускорение, а $\boldsymbol{F}_\nu$ и $\boldsymbol{R}_\nu$ — соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку ($\nu = 1, \ldots, N$). Поскольку связи идеальны, то в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

Подставляя сюда вместо реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ их выражения из уравнений (1) и умножая обе части полученного равенства на — 1, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Равенство (3) называется *общим уравнением динамики*. Это равенство утверждает, что при движении системы в любой момент времени *сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Таким образом, общее уравнение динамики всегда выполняется для любого совместимого со связями движения, соответствующего заданным активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

Пусть теперь, наоборот, дано некоторое совместимое со связями движение системы, для которого выполняется общее уравнение динамики (3). Тогда, полагая

$$\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N),$$

будем иметь равенства (1) и (2). Таким образом, в любой момент времени можно подобрать такие реакции $\boldsymbol{R}_\nu$, которые в силу равенства (2) были бы допустимыми для данных связей и при которых имеют место полученные из второго закона Ньютона уравнения (1). Мы считаем, что эти реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ в действительности реализуются («гипотеза о реализации допустимых реакций») и что, следовательно, рассматриваемое движение соответствует данным активным силам $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Таким образом, *общее уравнение динамики выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы движение, совместимое со связями, соответствовало заданной системе активных сил* $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$[1]).

Найдем выражения для реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ с помощью так называемых неопределенных множителей Лагранжа. Выпишем соотношения, определяющие виртуальные перемещения точек

---

[1]) При этом не следует забывать, что общее уравнение динамики (3) представляет собой, по существу, не одно уравнение, а систему уравнений, поскольку для любого момента времени t в уравнение (3) вместо $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ можно подставить *произвольные* виртуальные перемещения.

системы (см. § 2):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{5}$$

Умножая почленно равенства (4) и (5) на произвольные скалярные множители $-\lambda_\alpha$ и $-\mu_\beta$ и складывая почленно полученные равенства с равенством (2), получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\boldsymbol{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \right) \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{6}$$

В развернутом виде это соотношение запишется так:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta A_{\beta\nu} \right) \delta x_\nu + \{y\}_\nu \delta y_\nu + \{z\}_\nu \delta z_\nu = 0. \tag{6'}$$

Здесь мы через $\{y\}_\nu$ и $\{z\}_\nu$ сокращенно обозначили выражения, которые отличаются от выписанного в формуле (6′) коэффициента при δx_ν заменой букв x, A на y, B или на z, C соответственно.

Соотношения (7′) § 2 позволяют выразить $d+g$ из $3N$ виртуальных приращений δx_ν, δy_ν, δz_ν через остальные $n = 3N - d - g$ приращений. При этом определитель J, составленный из коэффициентов при «зависимых» приращениях в уравнениях (7′) § 2, отличен от нуля.

Подберем $d+g$ множителей λ_α и μ_β так, чтобы в равенстве (6′) коэффициенты при $d+g$ «зависимых» приращениях обратились в нуль. Это можно сделать, и притом единственным образом, ибо определитель J из коэффициентов при определяемых величинах λ_α, μ_β не равен нулю. После этого в равенстве (6′) остаются только слагаемые с независимыми приращениями δx_ν, δy_ν, δz_ν. Но тогда и коэффициенты при этих независимых приращениях также должны быть равны нулю.

Иначе говоря, неопределенные множители λ_α и μ_β могут быть подобраны так, чтобы все скалярные коэффициенты в равенстве (6′) и, следовательно, все векторные коэффициенты в равенстве (6) обращались в нуль. Но тогда

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

Мы получили общее выражение для реакций идеальных связей через неопределенные множители Лагранжа λ_α, μ_β ($\alpha = 1, \ldots, d$; $\beta = 1, \ldots, g$).

Подставляя выражения (7) для $\boldsymbol{R}_\nu$ в уравнение (1), мы получим так называемые *уравнения Лагранжа первого рода*[1]:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнения связей:

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, d;\ \beta = 1, \ldots, g). \tag{9}$$

Заменяя каждое векторное уравнение тремя скалярными, мы можем считать, что уравнения (8) и (9) составляют систему из $3N + d + g$ скалярных уравнений с $3N + d + g$ неизвестными скалярными величинами x_ν, y_ν, z_ν, λ_α, μ_β. Интегрируя эту систему, мы получаем конечные уравнения движения и одновременно из равенств (7) — величины реакций связей. Однако интегрирование такой системы обычно весьма затруднено из-за большого числа уравнений. Поэтому уравнения Лагранжа первого рода практически мало применяются.

В § 6 и § 10 мы получим уравнения Лагранжа второго рода для голономной системы и уравнения Аппеля для неголономной системы; в этих уравнениях число неизвестных скалярных величин (и, следовательно, число уравнений) равно $3N - d$, т. е. на $2d + g$ единиц меньше, чем в системе уравнений (8) и (9).

---

[1]) Эти уравнения были получены французским математиком и механиком Ж. Лагранжем в его знаменитом трактате «Аналитическая механика», опубликованном в 1788 г. (русский перевод т. I вышел в 1938 г., т. II — в 1950 г.). В этом трактате впервые были изложены основы аналитической механики.

Пример. Две весомые материальные точки M_1 и M_2 с одинаковой массой $m=1$ соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Определить движение точек M_1 и M_2.

Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты точек M_1 и M_2. Запишем уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2\right]=0, \\ (x_2-x_1)(\dot y_2+\dot y_1)-(\dot x_2+\dot x_1)(y_2-y_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями λ и μ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_1 &= -\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1), \\ \ddot y_1 &= -g-\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_2 &= \lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1), \\ \ddot y_2 &= -g+\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из уравнений (11) с учетом первого уравнения (10) определим λ и μ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)-\frac{1}{l^2}\left[(x_2-x_1)\ddot x_1+(y_2-y_1)\ddot y_1\right], \\ \mu &= \frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}\left[(y_2-y_1)\ddot x_1-(x_2-x_1)\ddot y_1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Заметим, что уравнения (12) получаются из уравнений (11), если в последних заменить λ на $-\lambda$ и $\ddot x_1$, $\ddot y_1$ — на $\ddot x_2$, $\ddot y_2$. Поэтому, определяя λ и μ из уравнений (12), находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{g}{l^2}(y_2-y_1)+\frac{1}{l^2}\left[(x_2-x_1)\ddot x_2+(y_2-y_1)\ddot y_2\right], \\ \mu &= \frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}\left[(y_2-y_1)\ddot x_2-(x_2-x_1)\ddot y_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Приравняв между собой соответствующие выражения для μ и λ в формулах (13) и (14), после элементарных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} (\ddot x_2-\ddot x_1)(y_2-y_1)-(\ddot y_2-\ddot y_1)(x_2-x_1)=0, \\ (\ddot x_2+\ddot x_1)(x_2-x_1)+(\ddot y_2+\ddot y_1)(y_2-y_1)+2g(y_2-y_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Введем сокращенные обозначения:

$$u=x_2-x_1, \quad v=y_2-y_1, \quad P=\dot x_1+\dot x_2, \quad Q=\dot y_1+\dot y_2. \tag{16}$$

Тогда уравнения (10) и (15) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 &= l^2, \\ \ddot{u}v - u\ddot{v} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$Pv - Qu = 0, \tag{18}$$

$$\dot{P}u + \dot{Q}v + 2gv = 0. \tag{19}$$

Равенства (17) показывают, что в плоскости (u, v) точка с координатами u, v движется по кругу радиуса l с центром в начале координат, причем ее ускорение все время направлено к центру. Но тогда движение этой точки будет равномерным. Поэтому

$$u = l\cos\varphi, \quad v = l\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \alpha = \text{const}, \quad \varphi = \alpha t + \beta. \tag{20}$$

Согласно равенству (18) можно положить

$$P = \frac{f}{l}u, \qquad Q = \frac{f}{l}v. \tag{21}$$

Подставляя эти выражения в равенство (19) и учитывая равенства (17) и (20), найдем

$$\dot{f} + \frac{2g}{l}v = 0, \quad \text{т. е.} \quad \dot{f} = -2g\sin\varphi.$$

Тогда

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{\alpha}\dot{f} = -\frac{2g}{\alpha}\sin\varphi \quad \text{и} \quad f = \frac{2g}{\alpha}\cos\varphi + 2\gamma.$$

Следовательно, в силу равенств (20) и (21), имеем

$$P = 2\left(\gamma + \frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\cos\varphi, \quad Q = 2\left(\gamma + \frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\sin\varphi. \tag{22}$$

Интегрируя, находим

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \int P\,dt = \frac{1}{\alpha}\int P\,d\varphi = \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{\alpha^2}\varphi + 2\delta, \\ y_1 + y_2 &= -\frac{2\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi + 2\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Из равенств (16), (20) и (23) окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_1 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi - \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_2 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
\varphi &= \alpha t + \beta
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

(α, β, γ, δ, ε — произвольные постоянные).

§ 4. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера

Положением равновесия называется такое положение системы, в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю.

Положение системы $\boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) будет положением равновесия в том и только в том случае, когда «движение» $\boldsymbol{r}_\nu(t) \equiv \boldsymbol{r}_\nu^0$ ($\nu = 1, \ldots, N$) удовлетворяет общему уравнению динамики, т. е. когда в этом положении системы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \quad (1)$$

Равенство (1) выражает собой *принцип виртуальных перемещений*.

Для того чтобы некоторое (совместимое со связями) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.

Обычно принцип виртуальных перемещений применяют к стационарным связям. Если связи стационарны, то термин «совместимое со связями» означает, что положение системы удовлетворяет конечным связям. Дифференциальные же связи, будучи линейными и однородными относительно скоростей,